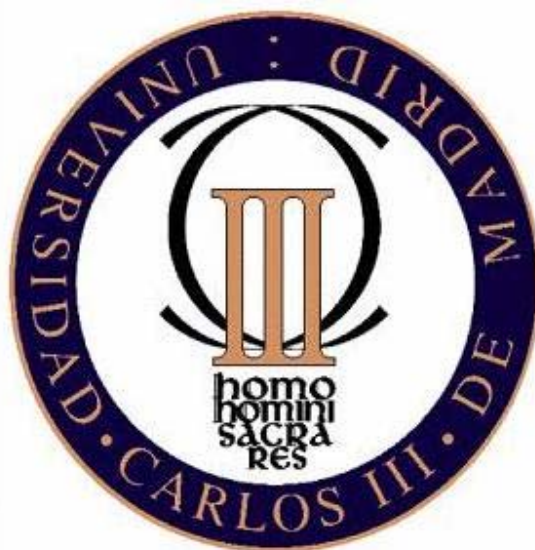


UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA INDUSTRIAL

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TÉRMICA Y DE FLUIDOS



PROYECTO FINAL DE CARRERA:

**ESTUDIO NUMÉRICO Y EXPERIMENTAL DE LA FUERZA DE
BJERKNES**

AUTORA: ELENA IGUALADA VILLODRE

TUTOR: JAVIER RODRÍGUEZ RODRÍGUEZ

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN	6
CAPÍTULO 2: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	14
ECUACIONES GENERALES	14
NOMENCLATURA	15
2.1 OSCILACIÓN RADIAL DE LA BURBUJA	16
2.1.1 Adimensionalización	17
2.2 VELOCIDAD DEL CAMPO FLUIDO	18
2.2.1 Adimensionalización	19
2.3 VELOCIDAD DE LA BURBUJA	19
2.3.1 Adimensionalización	22
2.4 POSICIÓN DE LA BURBUJA.....	23
2.5 ÓRDENES DE MAGNITUD ESPERADOS	24
2.6 ECUACIONES ADIMENSIONALES TENIENDO EN CUENTA EL EFECTO DE LA CAPA DE LÍPIDOS DE LA SUPERFICIE DE LA BURBUJA.....	25
2.7 ECUACIONES ADIMENSIONALES SIN TENER EN CUENTA EL EFECTO DE LA CAPA DE LÍPIDOS DE LA SUPERFICIE DE LA BURBUJA.....	26
2.8 PROBLEMA LINEALIZADO	27
2.9 ANÁLISIS DE RESONANCIA	30
2.9.1 Frecuencia de resonancia	32
2.10 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	33
2.10.1 Fisicadim	33
2.10.2 Frnum.....	33
2.10.3 Arvectorial.....	36
CAPÍTULO 3: ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS ESCALAS TEMPORALES MÚLTIPLES.....	38
3.1 HIPÓTESIS.....	38
3.2 ANÁLISIS DE ÓRDENES DE MAGNITUD	39
3.3 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES	43
CAPÍTULO 4: VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS ESCALAS TEMPORALES MÚLTIPLES	48
4.1 CAMPO FLUIDO EXTERNO.....	48
4.2 VALIDACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA.....	49
4.2.1 Partícula pesada.....	50

4.2.2 Velocidad inicial nula de la partícula	52
4.2.3 Partícula con velocidad inicial.....	52
4.2.4 Ausencia de campo fluido.....	53
4.2.5 Ausencia de insonación	54
4.3 VALIDACIÓN DEL PROBLEMA PROMEDIADO PARA TIEMPOS LARGOS	55
4.3.1 Cálculo del número de Stokes	61
CAPÍTULO 5: ANÁLISIS EXPERIMENTAL.....	70
5.1 ENSAYOS EXPERIMENTALES.....	70
5.2 PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA	72
5.2.1 Burbujas insonadas a la frecuencia de resonancia	74
5.2.2 Burbujas insonadas con ondas acústicas distintas	78
5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES	79
5.3.1 Calibración	79
5.3.2 Código “trajanalysis”	80
5.3.3 Código “gettrajectories”	82
5.3.4 Código “bjerknesanalysis”	83
5.4 CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES INVOLUCRADAS.....	88
5.4.1 Velocidad ascensional de la burbuja	88
5.4.2 Velocidad estacionaria bajo el efecto del ultrasonido	97
5.5 ENSAYOS CON RESULTADOS CONTRARIOS A LOS TEÓRICOS.....	103
CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES.....	106
REFERENCIAS.....	108

RESUMEN

En el presente documento se lleva a cabo un estudio sobre el comportamiento de burbujas que en el seno de un líquido son sometidas a un campo acústico que varía con la posición y con el tiempo. El objetivo de conocer el movimiento de burbujas en estas condiciones es su uso como agentes de contraste para la obtención de imágenes mediante ultrasonidos en el marco de las aplicaciones médicas.

A lo largo de esta memoria se desarrollarán las ecuaciones teóricas que rigen el comportamiento de la burbuja y del líquido que la rodea ante las condiciones descritas. Se propondrán modelos simplificados del problema, tales como una linealización de las oscilaciones radiales de la burbuja o un estudio mediante escalas temporales múltiples. Finalmente se expondrán los experimentos realizados, analizando sus resultados de modo que queden validados el desarrollo teórico propuesto y su solución numérica.

CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN

Una burbuja no es ni un gas, ni un líquido ni un sólido o plasma. No puede existir en una única fase material, sino que requiere al menos dos para formarse. En este estudio serán consideradas las burbujas formadas en el seno de un líquido, es decir, volúmenes de gas y vapor rodeados por una fase líquida. En muchos casos las burbujas alcanzan una forma esférica debido a la tensión superficial, moviéndose a través del líquido debido al efecto que producen sobre ellas las fuerzas de presión de todo tipo, desde estáticas y dinámicas (como por ejemplo las ondas acústicas) hasta fuerzas de flotabilidad o de arrastre.

Las burbujas aparecen en muchas disciplinas, tanto en fenómenos naturales como en los desarrollos tecnológicos asociados a ellos. De hecho, el estudio de las burbujas y de su comportamiento ha sido ya recogido en libros y artículos como los citados al final del documento. En la mayoría de los casos las burbujas generadas en los fenómenos físicos no se encuentran aisladas, sino que aparecen formando agrupaciones. Sin embargo, el estudio de una burbuja aislada es el punto de partida para describir el comportamiento de estructuras más complejas como conjuntos de burbujas que toman la forma de clusters, filamentos y nubes. Algunas aplicaciones actuales de las burbujas, como la aplicación a la que va destinada este estudio, requieren precisamente la generación de burbujas aisladas que acabamos de comentar. Esto se consigue mediante luz láser pulsada o concentrada empleada para la producción precisa de burbujas en investigación.

Las primeras investigaciones científicas de mayor relevancia sobre burbujas tuvieron lugar en el marco de la tecnología marina, debido a la formación de burbujas por ruptura del agua en los propulsores de los barcos al girar a alta velocidad; se estudió así el fenómeno de formación de burbujas por cavitación.

En la actualidad una de las principales vías de investigación consiste en la aplicación de burbujas en medicina para la generación de imágenes con el uso de ultrasonidos, ondas sonoras que presentan una frecuencia superior al límite superior de audición del ser humano, que se encuentra aproximadamente en unos 20 KHz. Se emplean microburbujas, burbujas cuyo radio es del orden del micrómetro, con una cubierta en su superficie a modo de cápsula; reciben el nombre de agentes de contraste y se utilizan para mejorar el contraste de las imágenes. Los ultrasonidos actúan sobre las burbujas dirigiéndolas a la zona deseada a través del flujo sanguíneo con el objetivo de obtener imágenes que puedan ayudar a la detección por ejemplo de problemas cardíacos.

En el presente documento se tratará de estudiar el comportamiento de las burbujas bajo el efecto de un ultrasonido en relación a la aplicación comentada. Las burbujas involucradas en esta aplicación son burbujas aisladas cuya superficie es cubierta con una capa protectora. Sin embargo, nuestros equipos no nos permiten generar burbujas aisladas, por lo que en nuestros experimentos trataremos de captar el movimiento de burbujas que no se vean afectadas por las que se encuentran a su alrededor o que estén suficientemente alejadas del resto de componentes de la población de burbujas.

A continuación explicaremos los estudios desarrollados para caracterizar el comportamiento de una burbuja bajo una insonación acústica ultrasónica.

Oscilación de la burbuja, (Lauterborn y Kurz, 2010)

Una burbuja en un líquido puede ser considerada como un sistema oscilatorio. En el caso de una burbuja esférica podemos emplear una única variable para describir su forma y tamaño: el radio $R(t)$ cuya variación será determinada a través de un modelo de ecuaciones que describa el comportamiento del oscilador. Para formular este modelo será necesario conocer parámetros relativos al líquido que rodea a la burbuja así como del gas o vapor contenidos en ella. Los parámetros usados en el modelo básico de Rayleigh son la presión externa en el líquido p_e , la densidad del líquido ρ , la presión en el interior de la burbuja p_i y su radio inicial R_0 :

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = p_i - p_e$$

Como se puede advertir en el modelo, la diferencia entre las presiones del líquido y del gas es la responsable de las oscilaciones de la burbuja.

Si tenemos en cuenta la presión del campo acústico $p(t)$ y otros parámetros de los que depende el sistema, como el exponente politrópico del gas contenido en la burbuja γ , la viscosidad dinámica del líquido μ y su tensión superficial σ , el modelo de Rayleigh adquiere la siguiente forma:

$$\rho R \ddot{R} + \frac{3}{2} \rho \dot{R}^2 = p_g \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} + p_v - p_{stat} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p(t)$$

$$p_g = \frac{2\sigma}{R_0} + p_{stat} - p_v$$

$$p(t) = -p_a \sin(2\pi f_a t)$$

Siendo p_g la presión del gas en el interior de la burbuja en reposo, p_{stat} la presión estática en el líquido y p_v la presión de vapor, que se tomará como constante.

La presión acústica se caracteriza como una presión de variación sinusoidal con una amplitud p_a y una frecuencia angular ω_a . Este modelo, junto con algunas variantes del mismo, es conocido como el modelo de Rayleigh-Plesset.

Otro modelo para caracterizar las variaciones radiales es el modelo de Gilmore, que incorpora la radiación acústica en el líquido procedente de la superficie de la burbuja oscilante, que actuaría como la membrana de un altavoz. Este modelo propone la siguiente formulación:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C}\right) \dot{R}^2 = \left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) H + \frac{\dot{R}}{C} \left(1 - \frac{\dot{R}}{C}\right) R \frac{dH}{dR}$$

donde

$$H = \int_{p_{r \rightarrow \infty}}^{p_{r=R}} \frac{dp(\rho)}{\rho}$$

$$p(\rho) = A \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{n_T} - B$$

$$p_{r=R} = \left(p_{stat} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - bR_0^3}{R^3 - bR_0^3} \right)^\gamma - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R}$$

$$p_{r \rightarrow \infty} = p_{stat} + p(t)$$

$$C = \sqrt{c_0^2 + (n_T - 1)H}$$

Este modelo presenta algunos parámetros adicionales con respecto al modelo de Rayleigh-Plesset, como la velocidad del sonido en el líquido en condiciones normales c_0 , la velocidad del sonido en la pared de la burbuja C , la entalpía H , los parámetros A , B y n_T de la ecuación de estado que relaciona la presión y densidad del gas de la burbuja y la constante de van der Waals b .

Un modelo que va más allá que el de Gilmore es el modelo de Keller-Miksis, que además de incorporar la radiación acústica de la burbuja, introduce un tiempo de retardo $t - R/c$ en las ecuaciones:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c} \right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c} \right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c} \right) \frac{p_l}{\rho} + \frac{R}{\rho c} \frac{dp_l}{dt}$$

donde

$$p_l = \left(p_{stat} + \frac{2\sigma}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} - p_{stat} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p(t)$$

$$p(t) = p_a \sin(2\pi f_a t)$$

Éstos son los tres modelos básicos para la descripción de la oscilación radial. En nuestro estudio partiremos de un modelo basado en la ecuación de Rayleigh-Plesset que ha sido extendido para caracterizar el movimiento de los agentes de contraste en aplicaciones ultrasónicas por Chomas y Morgan (referencia Dayton 2002).

$$\rho \left(R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - R_0^3(b/V_m)}{R^3 - R_0^3(b/V_m)} \right)^\gamma + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} p(R, t) - \frac{4\mu \dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2X}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 +$$

$$- 12\mu_{sh} \delta_{sh} \frac{R}{R(R - \delta_{sh})} - (p_0 + p_{driv}(t))$$

$$p(R, t) = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - R_0^3(b/V_m)}{R^3 - R_0^3(b/V_m)} \right)^{\gamma} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2X}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2$$

$$p_{driv}(t) = p_a \sin(\vec{k}\vec{x} - 2\pi f_a t)$$

Este modelo difiere del modelo básico de Rayleigh-Plesset en que incorpora los parámetros correspondientes a la cubierta de la burbuja y el efecto de una radiación acústica amortiguada. Además para el primer término de la derecha de la igualdad, que se corresponde con la presión del gas interior, incluye una corrección debida a las fuerzas de van der Waals $\left(R_0^3(b/V_m) \right)$ de la que prescindiremos en nuestro análisis.

Compararemos nuestro modelo para las oscilaciones radiales con el modelo de Gilmore resolviendo el problema para las condiciones de las figuras 2 y 3 del artículo “Physics of bubble oscillations”, (Lauterborn y Kurz, 2010).

Ejemplo 1

Se toman como condiciones del problema las siguientes:

$$R_0 = 120\mu m$$

$$f_a = 20kHz$$

$$p_a = 70kPa$$

$$R(t = 0) = R_0$$

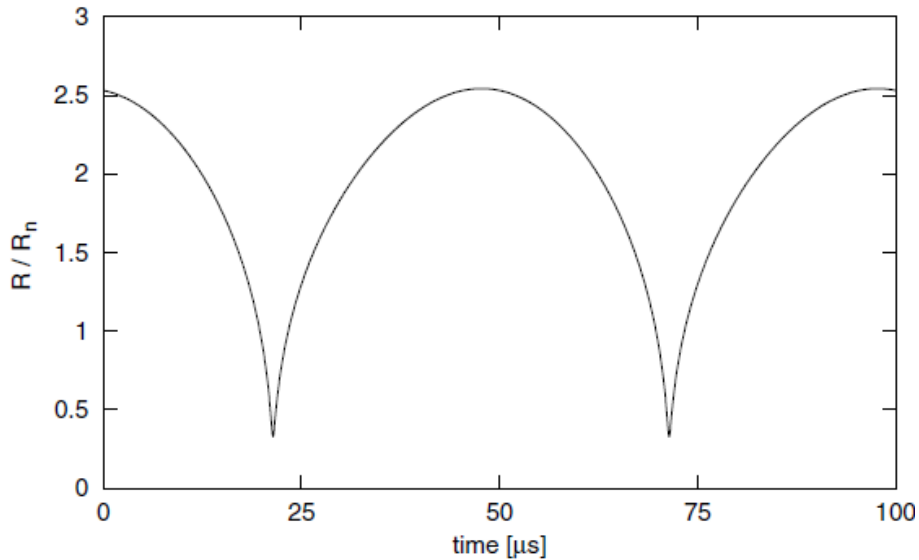


Figura 1.1 Ejemplo 1, modelo Gilmore

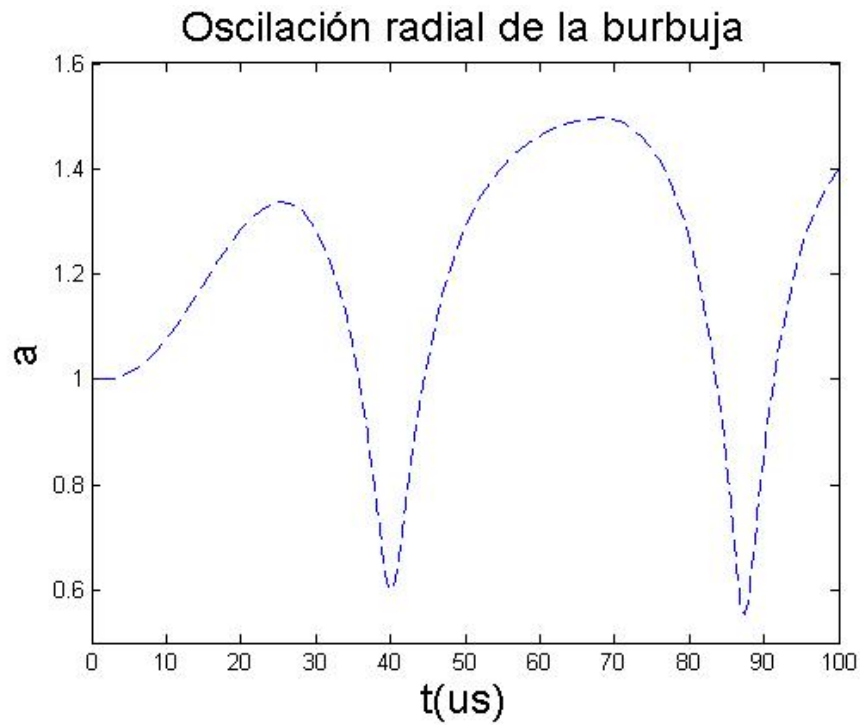


Figura 1.2 Ejemplo 1, modelo modificado Rayleigh-Plesset

La respuesta de nuestro modelo es muy similar a la del modelo de Gilmore. La diferencia está en que hemos impuesto como condición inicial que el valor del radio sea el de partida, introduciendo así un desfase temporal en la solución que hace que las contracciones radiales se den más tarde.

Ejemplo 2

Las condiciones son:

$$R_0 = 5\mu m$$

$$f_a = 20kHz$$

$$p_a = 130kPa$$

$$R(t = 0) = R_0$$

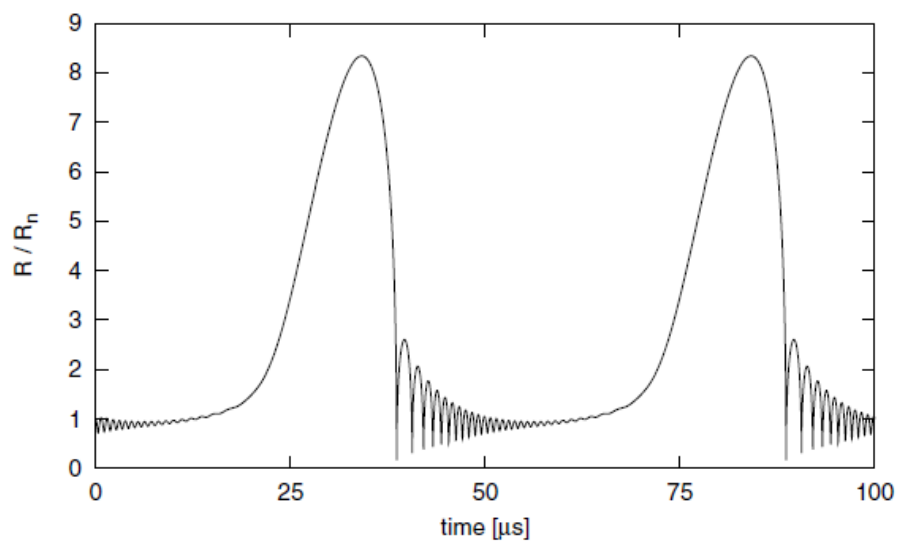


Figura 1.2 Ejemplo 2, modelo Gilmore

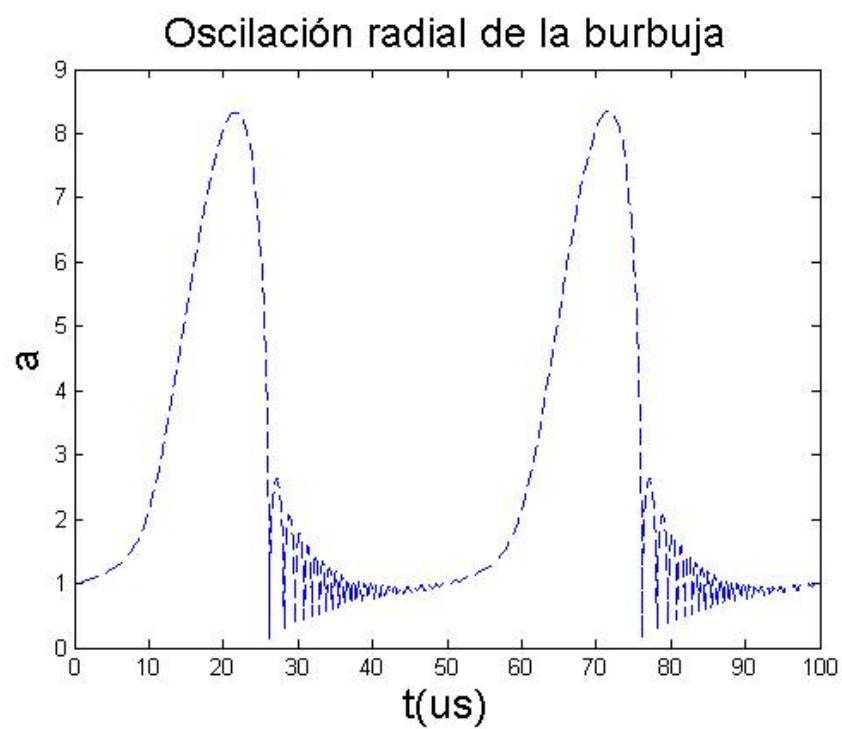


Figura 1.4 Ejemplo 2, modelo modificado Rayleigh-Plesset

En este caso ambas respuestas también presentan un desfase temporal pero vemos que la forma de las oscilaciones y su módulo coinciden. Queda por tanto validado el modelo propuesto para la burbuja oscilante.

Desplazamiento de la burbuja

El campo acústico al que sometemos a la burbuja es también dependiente de la posición. El gradiente espacial del campo de presiones ejercerá una fuerza neta sobre la burbuja que dependerá de su tamaño y del gradiente espacial de presión. Como dicha fuerza varía periódicamente, la fuerza neta sobre la burbuja se puede tomar como la media temporal en un periodo de la fuerza oscilatoria; esta fuerza es conocida como Fuerza de Bjerknes, cuyos efectos sobre la burbuja son objeto de estudio en este documento.

Para un campo acústico unidimensional su expresión es:

$$F_B = -\langle V(t) \nabla p_{ac}(x, t) \rangle_\tau$$

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi R^3(t)$$

$$p_{ac}(x, t) = p_a(x) \sin(\omega_a t)$$

Además de la fuerza debida al campo acústico, actuarán sobre la burbuja una fuerza de resistencia o fuerza viscosa debida a la viscosidad del fluido en el que se mueve, una fuerza llamada de masa virtual y la fuerza de flotabilidad, The acoustic bubble, Leighton (1994)

En los próximos capítulos trataremos de desarrollar esta teoría de forma más detallada, resolviendo el problema propuesto de forma numérica y validando los resultados apoyándonos en ensayos experimentales.

CAPÍTULO 2: FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

ECUACIONES GENERALES

Una microburbuja sometida a la acción de un campo acústico de longitud de onda mucho mayor que su tamaño se comportará como un oscilador no lineal para un amplio rango de presiones acústicas. La frecuencia de resonancia de éste oscilador será función del tamaño inicial de la burbuja y de la presión acústica con la que la estamos insonando.

En este estudio se analizará el comportamiento no lineal de las oscilaciones de las burbujas sometidas a un campo acústico, proponiéndose asimismo un modelo lineal que será válido para pequeñas oscilaciones radiales.

A lo largo de todo el análisis consideraremos las siguientes hipótesis de partida:

- La longitud de onda del campo acústico de presión es muy superior al tamaño de las burbujas:
$$\lambda \gg R$$

Por ello el gradiente de presión acústico no afecta a las oscilaciones radiales.
- Población de burbujas de tamaño uniforme:
En los experimentos no es posible conseguirlo, por lo que trataremos de generar burbujas aisladas.
- Concentración de burbujas suficientemente pequeña para despreciar la radiación acústica de las mismas.
- El fluido influye sobre la burbuja pero la burbuja no influye sobre el fluido.

A continuación vamos a analizar las ecuaciones que rigen el comportamiento de la burbuja, que presentará dos movimientos como consecuencia de las variaciones temporales y espaciales de la presión que actúa sobre ella:

1. Un movimiento de traslación, por el hecho de moverse en el seno de un líquido.
2. Un movimiento de oscilación radial debido a la excitación externa con ultrasonidos.

NOMENCLATURA

$p_0 \equiv$ presión hidrostática del agua (10^5 Pa)

$R_0 \equiv$ radio inicial de la burbuja ($\sim 10 \mu\text{m}$)

$\sigma \equiv$ tensión superficial del agua (0.072 N/m)

$\rho_l \equiv$ densidad del agua (1000 kg/m^3)

$\rho_b \equiv$ densidad de la burbuja ($\sim 1 \text{ kg/m}^3$)

$\mu \equiv$ viscosidad dinámica del agua ($10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$)

$c \equiv$ velocidad del sonido en el agua (1500 m/s)

$\gamma \equiv$ exponente politrópico del gas que contiene la burbuja (~ 1.4)

$\mu_{sh} \equiv$ viscosidad dinámica de la capa de lípidos que recubre la burbuja

$X \equiv$ módulo elástico de la capa de lípidos que recubre la burbuja

$\delta_{sh} \equiv$ espesor de la capa de lípidos que recubre la burbuja

$A \equiv$ amplitud de la onda acústica ($\sim 10^3 - 10^4 \text{ Pa}$)

$f \equiv$ frecuencia de insonación ($\sim \text{MHz}$)

$\omega \equiv$ frecuencia angular de insonación, $\omega = 2\pi f$

$\lambda \equiv$ longitud de onda de la onda acústica ($\sim \text{mm}$)

$k \equiv$ número de onda angular de la onda acústica, $k = 2\pi/\lambda$ ($\sim \text{mm}^{-1}$)

$b \equiv$ constante de van der Waals

$\vec{n} \equiv$ vector que indica la dirección de propagación de la onda, vector director del número de onda,
 $\vec{k} = k \cdot \vec{n}$

2.1 OSCILACIÓN RADIAL DE LA BURBUJA

La variación temporal de la presión que actúa sobre la burbuja induce un movimiento de oscilación de su radio, provocando así un cambio de volumen de la burbuja que como veremos más adelante influirá también en su movimiento traslacional.

Para describir la oscilación radial de la burbuja utilizaremos un modelo basado en la ecuación de Rayleigh-Plesset, añadiendo el efecto de la existencia de una capa de lípidos en la burbuja y el efecto del campo acústico .Dayton, 2002

$$\rho_l \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - R_0^3(b/V_m)}{R^3 - R_0^3(b/V_m)} \right)^{\gamma} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} p(R, t) - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2X}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 +$$

$$-12\mu_{sh}\delta_{sh} \frac{R}{R(R - \delta_{sh})} - (p_0 + p_{driv}(t)) \quad (1)$$

Siendo

$$p(R, t) = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) \left(\frac{R_0^3 - R_0^3(b/V_m)}{R^3 - R_0^3(b/V_m)} \right)^{\gamma} - \frac{4\mu\dot{R}}{R} - \frac{2\sigma}{R} - \frac{2X}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \quad (2)$$

Este modelo calcula la presión del gas que ocupa el interior de la burbuja considerándolo como ideal, para lo cual se introduce una corrección dada por la constante de van der Waals “b”. Para nuestro análisis nos olvidaremos del efecto de las fuerzas de van der Waals, es decir, tomaremos el valor de la constante “b” como nulo. Considerando esta simplificación derivamos (2) y sustituimos en (1), obteniendo así una sola expresión para describir las oscilaciones de la burbuja.

$$\rho_l \left(R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \left(1 - 3\gamma \frac{\dot{R}}{c} \right) - 4\mu \left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\ddot{R}}{c} - \frac{\dot{R}^2}{cR} \right) - \frac{2\sigma}{R} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c} \right)$$

$$- \frac{2X}{R} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \left(1 - 3\frac{\dot{R}}{c} \right) - 12\mu_{sh}\delta_{sh} \frac{\dot{R}}{R(R - \delta_{sh})} - (p_0 + p_{driv}(t)) \quad (3)$$

2.1.1 Adimensionalización

Parámetros fundamentales: R_0, ω y ρ_l

$$\rho_l R_0^2 \omega^2 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_0} + \frac{2X}{R_0} \right) (a)^{-3\gamma} \left(1 - \frac{3\gamma\omega R_0}{c} \dot{a} \right) - 4\mu \left(\frac{\omega\dot{a}}{a} + \frac{\omega R_0}{c} \left(\omega\ddot{a} - \frac{\omega\dot{a}^2}{a} \right) \right) \\ - \frac{2\sigma}{R_0 a} \left(1 - \frac{\omega R_0 \dot{a}}{c} \right) - \frac{2X}{R_0 a} a^{-2} \left(1 - \frac{3\omega R_0 \dot{a}}{c} \right) - 12\mu_{sh} \delta_{sh} \frac{\omega\dot{a}}{a(R_0 a - \delta_{sh})} - (p_0 + p_{driv}(t))$$

Siendo $p_{driv}(t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \left(\frac{p_0}{\rho_l R_0^2 \omega^2} + \frac{2\sigma}{\rho_l R_0^3 \omega^2} + \frac{2X}{\rho_l R_0^3 \omega^2} \right) a^{-3\gamma} \left(1 - \frac{3\gamma\omega R_0}{c} \dot{a} \right) - \frac{4\mu\omega}{\rho_l R_0^2 \omega^2} \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\omega R_0}{c} \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) \\ - \frac{2\sigma}{\rho_l R_0^3 \omega^2 a} \left(1 - \frac{\omega R_0 \dot{a}}{c} \right) - \frac{2X}{\rho_l R_0^3 \omega^2} a^{-3} \left(1 - \frac{3\omega R_0 \dot{a}}{c} \right) - \frac{12\mu_{sh} \delta_{sh}}{\rho_l R_0^2 \omega^2} \frac{\omega\dot{a}}{a(R_0 a - \delta_{sh})} \\ - \left(\frac{p_0}{\rho_l R_0^2 \omega^2} + \frac{A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}{\rho_l R_0^2 \omega^2} \right)$$

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) a^{-3\gamma} (1 - 3\gamma M \dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + M \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) + \\ - \frac{1}{We} \frac{(1 - M \dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}} a^{-3} (1 - 3M \dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right) \quad (4)$$

Esta ecuación tiene errores del orden de M^2 , por lo que sólo es válida para $M \ll 1$, es decir, para longitudes de onda de campo de presión mucho mayores que el radio de la burbuja

Parámetros adimensionales:

$$\Pi_0 = \frac{p_0}{\rho_l R_0^2 \omega^2} \quad M = \frac{\omega R_0}{c} \quad Re_\omega = \frac{\rho_l R_0^2 \omega}{4\mu} \quad We_{sh} = \frac{\rho_l R_0^3 \omega^2}{2X} \\ We = \frac{\rho_l R_0^3 \omega^2}{2\sigma} \quad \varepsilon = \frac{A}{\rho_l R_0^2 \omega^2} \quad Re_{sh} = \frac{\rho_l R_0^2 \omega}{12\mu_{sh}} \quad \delta = \frac{\delta_{sh}}{R_0}$$

2.2 VELOCIDAD DEL CAMPO FLUIDO

Para determinar la velocidad del líquido en el que se mueve la burbuja, plantearemos la ecuación de cantidad de movimiento para el líquido:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \rho_l \vec{v} \nabla \vec{u} = -\nabla p \quad (1.1) \quad (1.2) \quad (1.3)$$

(1.2) Despreciamos este término ya que esperamos velocidades de traslación muy inferiores a la velocidad del sonido en el líquido considerado, es decir, porque el número de Mach basado en la velocidad de traslación de la burbuja es muy pequeño, Maxey - Riley (1983).

(1.3) $p = p_0 + A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$, con $p_0 = p_0(\vec{x}, t)$. Aunque la presión hidrostática del líquido es dependiente de la posición y del tiempo, sus oscilaciones tienen una longitud de onda mucho mayor que la longitud de onda acústica. Puesto que estamos estudiando el efecto del líquido sobre la burbuja, vamos a considerar la presión hidrostática como uniforme ya que nos hallamos en un entorno de la burbuja en el que las únicas variaciones de presión apreciables son las correspondientes a la presión acústica.

Con lo cual, podemos expresar el gradiente de presión como sigue:

$$\nabla p = A \vec{k} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Comparamos ahora los órdenes de magnitud de los términos 1 y 3:

$$\rho \omega u \sim A \frac{\omega}{c} \rightarrow u \sim \frac{A}{\rho c}$$

Una vez obtenido el orden de magnitud de la velocidad del líquido, lo compararemos con el de la velocidad de oscilación de la burbuja:

$$\begin{aligned} \dot{R} &\sim \dot{R}_0 \omega \\ \frac{u}{\dot{R}} &\sim \frac{A}{\rho c R_0 \omega} \sim \frac{A}{\rho R_0^2 \omega^2} \frac{R_0 \omega}{c} = \varepsilon M \ll 1 \end{aligned}$$

Como se puede comprobar, la velocidad de oscilación del radio de la burbuja es mucho mayor que la velocidad del líquido.

$$\rho_l \frac{d\vec{u}}{dt} = -A \vec{k} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \quad (5)$$

2.2.1 Adimensionalización

Parámetros fundamentales: R_0 , ω y ρ_l

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (6)$$

2.3 VELOCIDAD DE LA BURBUJA

Para determinar la velocidad de la burbuja vamos a plantear la ecuación del equilibrio de fuerzas que actúan sobre la misma, Dayton 2002:

$$\rho_b V_b \frac{d\vec{v}}{dt} = -V_b \nabla p - 6\pi\mu R(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{1}{2} \frac{d(\rho_l V_b (\vec{u} - \vec{v}))}{dt} + (\rho_l - \rho_b) V_b \vec{g} \quad (7)$$

(3.1)
(3.2)
(3.3)
(3.4)
(3.5)

Analizamos ahora cada uno de los términos que intervienen:

(3.1): La masa de la burbuja es considerada como constante ya que, aunque su densidad y volumen varíen, su producto se mantiene constante. Por ello, para indicar que esta masa es constante, tomaremos para este primer término la densidad y volumen iniciales: $\rho_{b0} V_{b0} \frac{d\vec{v}}{dt}$

(3.2): Fuerza neta experimentada por una burbuja esférica de volumen V_b en un campo de presión estacionaria con gradiente de presión ∇p . Esta fuerza se conoce como Fuerza de Bjerknes y es el resultado de la interacción del campo fluido con las oscilaciones de las burbujas, es decir, es la fuerza neta que ejerce el campo fluido sobre las partículas.

La Fuerza de Bjerknes primaria se manifiesta desplazando a la partícula de su posición, en la dirección de propagación de la onda acústica. Por otro lado, la Fuerza de Bjerknes secundaria aparece entre las burbujas haciendo que se atraigan o se repelan en función de si oscilan en fase o no respectivamente.

En este estudio no consideraremos la componente secundaria de la Fuerza de Bjerknes entre burbujas; trataremos de justificar el efecto de la componente primaria sobre el movimiento de las mismas.

En el caso de que el tamaño de la burbuja sea mucho menor que la longitud de onda del campo acústico, $R \ll \lambda$, podemos modelar la presión como un valor constante más un gradiente espacial:

$$p = p_0 + \nabla p \cdot \vec{x}$$

$$\vec{F}_B = - \int_{\Sigma_b} p \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_b} (p_0 + \nabla p \cdot \vec{x}) d\sigma = - \int_{\Sigma_b} \nabla p \cdot \vec{x} d\sigma$$

$$\vec{F}_B = -V_b \nabla p$$

En el caso de que la burbuja tuviera un tamaño comparable a las variaciones del campo acústico, no podríamos aproximar la presión por esa expresión, y la fuerza neta sobre la burbuja vendría dada por más términos; además, por otro lado, no sólo habría que tener en cuenta las oscilaciones radiales de la burbuja, sino que también presentaría otros modos de vibración, con lo que este análisis no sería en ningún caso válido.

(3.3) y (3.4): Ambos componentes constituyen la fuerza de arrastre, que en términos generales, viene dada por:

$$-F_D = 6\pi\mu aU + \frac{V\rho}{2} \frac{dU}{dt} + 6a^2 \sqrt{\pi\rho\mu} \int_{-\infty}^t \left(\frac{dU}{dt} \right)_{t=s} \frac{ds}{\sqrt{t-s}}$$

Primera componente:

Fuerza de resistencia o fuerza viscosa. Su expresión se corresponde con la fuerza de Stokes para el caso de una esfera rígida.

La fuerza de Stokes se utiliza para flujos viscosos, en los que $Re \ll 1$. Su expresión general es

$$F = \alpha \mu UL$$

donde α es una constante que depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto de la dirección del movimiento. Para el caso de una esfera rígida,

$$\alpha = 3\pi \rightarrow F = 3\pi\mu U(2R) = 6\pi\mu UR$$

Cuando $Re > 1$, aparecen desviaciones de la Ley de Stokes:

$$F_m = \rho U^2 L^2 f_m, \quad f_m = \frac{\alpha(Re)}{Re}$$

donde el subíndice m indica que la fuerza actúa en la dirección del movimiento.

Cuando el Re crece, la dependencia con la inversa del Re se hace más débil y f_m tiende a un valor constante para $Re \sim 10^3 - 10^4$

Finalmente, cuando los esfuerzos viscosos del flujo son despreciables, es decir, para $Re \gg 1$, la fuerza de resistencia viene dada por:

$$F = \beta \rho U^2 L^2$$

donde β es una constante que de nuevo depende de la forma del cuerpo y de su orientación respecto a la dirección del movimiento.

Para nuestro problema hemos escogido la fuerza de Stokes para una esfera rígida puesto que es la utilizada por la mayoría de los autores ya que el número de Reynolds de traslación de la burbuja es bajo y la capa de lípidos que la recubre le da una cierta rigidez. Además esta expresión permite que la partícula presente variaciones en su radio sin que se cumpla la condición de adherencia en su superficie.

Segunda componente:

Este término es conocido como de masa añadida o masa virtual. La expresión utilizada está deducida para un flujo potencial, lo que supone altos números de Reynolds, mientras que en nuestro problema el Reynolds de traslación es pequeño.

A pesar de ello, esta misma expresión es aplicable al movimiento de burbujas en el seno de fluidos viscosos, Leighton (1994). Si una esfera se mueve en el seno de un fluido que se encuentra en estado estacionario salvo por la presencia de la misma, la inercia de la esfera se ve incrementada de forma aparente por la mitad de la masa del fluido desplazado. Esta masa virtual se debe a que la esfera debe poner el fluido en movimiento, desplazándolo del espacio que ella misma ocupará y trasladándolo al espacio que dejará vacío. La magnitud de la masa virtual desplazada depende de la forma del cuerpo, siendo para una esfera la masa de líquido correspondiente a la mitad de su volumen.

Podemos asimismo intuir que la expresión empleada será válida aunque nuestro flujo no sea potencial. Cuando la burbuja se pone en movimiento, si la aceleración es suficientemente rápida y la velocidad de la burbuja cambia en un tiempo t_a , la capa viscosa formada en el líquido permanecerá confinada a las proximidades de la esfera a una distancia $d = \sqrt{\nu t_a}$, que será mucho menor que el radio siempre que el tiempo t_a sea lo suficientemente pequeño.

Tercera componente:

Se trata de la integral de Basset, componente que es despreciada por la mayoría de los autores, por lo que no la incluiremos en nuestro análisis.

(3.5): Fuerza de flotabilidad sobre la burbuja. Puesto que la burbuja se mueve en el seno de un líquido, estará sometida a la fuerza de la gravedad como consecuencia de su peso y al empuje de Arquímedes.

La flotabilidad favorece el ascenso de la burbuja en el líquido y contribuye a su aceleración, por lo que aparece con signo positivo en el equilibrio de fuerzas. Cuando comparemos los resultados experimentales con los teóricos será importante tener en cuenta este término. Será desarrollado en los siguientes apartados aunque sólo será tenido en cuenta para la verificación de los resultados experimentales.

2.3.1 Adimensionalización

Parámetros fundamentales: R_0 , ω y ρ_l

$$\rho_{b0} V_{b0} \frac{d\vec{v}}{dt} = -V_b \nabla p - 6\pi\mu R(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{1}{2} \frac{d(\rho_l V_b(\vec{u} - \vec{v}))}{dt} + (\rho_l - \rho_b) V_b \vec{g}$$

$$\begin{aligned} \rho_{b0} \frac{4}{3} R_0^3 R_0 \omega^2 \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & -\frac{4}{3} R_0^3 a^3 A \frac{R_0 \omega}{c} \vec{n} \frac{1}{R_0} \cos\left(\frac{R_0 \omega}{c} \vec{n} \cdot \frac{\vec{x}}{R_0} - \omega t\right) + 6\mu R_0^2 \omega a(\vec{u} - \vec{v}) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d\left(\rho_l \frac{4}{3} a^3 R_0^4 \omega^2 (\vec{u} - \vec{v})\right)}{d\tau} + (\rho_l - \rho_b) \frac{4}{3} R_0^3 a^3 \vec{G} \frac{\mu \omega}{R_0 \rho_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{b0} \frac{4}{3} R_0^4 \omega^2 \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & -\frac{4}{3} a^3 \frac{R_0^2 A}{\rho_l R_0^4 \omega^2} \frac{R_0 \omega}{c} \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) + 6 \frac{\mu R_0^2 \omega}{\rho_l R_0^4 \omega^2} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2} \frac{4}{3} \frac{d\left(a^3 (\vec{u} - \vec{v})\right)}{d\tau} \\ & + (\rho_l - \rho_b) \frac{4}{3} R_0^3 a^3 \vec{G} \frac{\mu \omega}{R_0 \rho_l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}}{\rho_l} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & -a^3 \frac{R_0^2 A}{\rho_l R_0^4 \omega^2} \frac{R_0 \omega}{c} \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) + 6 \frac{3}{4 \cdot 4} \frac{4\mu}{\rho_l R_0^2 \omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2} \frac{d\left(a^3 (\vec{u} - \vec{v})\right)}{d\tau} \\ & + \frac{(\rho_l - \rho_b)}{\rho_l} a^3 \frac{\vec{G}}{4} \frac{4\mu}{\rho_l R_0^2 \omega} \end{aligned}$$

$$\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -a^3 \varepsilon M \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{u}}{d\tau} - \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{v}}{d\tau}$$

$$+ \frac{(\rho_l - \rho_b)}{4\rho_l} a^3 \frac{\vec{G}}{Re_\omega}$$

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} + \frac{1}{2}a^3\right) \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -\frac{3}{2}a^3 \varepsilon M \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) + \frac{9}{8Re_\omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u} - \vec{v}) + \frac{(\rho_l - \rho_b)}{4\rho_l} \frac{a^3 \vec{G}}{Re_\omega} \quad (8)$$

2.4 POSICIÓN DE LA BURBUJA

La posición del centro de la burbuja vendrá dada por la integración de su velocidad:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad (9)$$

$\vec{x} \equiv$ posición del centro de la burbuja

Que adimensionalizada queda:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad (10)$$

2.5 ÓRDENES DE MAGNITUD ESPERADOS

En el equilibrio de fuerzas sobre la burbuja esperamos que la fuerza viscosa y la fuerza de Bjerknes sean dominantes ya que en las situaciones prácticas a las que nos enfrentamos la velocidad que adquiere la burbuja movida por la fuerza de Bjerknes está limitada por un equilibrio entre dicha fuerza y la resistencia viscosa.

Por ello hemos adimensionalizado el problema a partir de ambas fuerzas, con lo que en forma adimensional serán de orden unidad:

$$F_B \sim F_{viscosa} \Rightarrow -V_b \nabla P \sim 6\pi\mu R(u - v)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -V_b \nabla P = -\frac{4}{3}\pi R^3 A k \cos(kx - \omega t) \sim R_0^3 (\rho_l R_0^2 \omega^2) (\omega/c) \sim \rho_l R_0^5 \frac{\omega^3}{c} \\ 6\pi\mu R(u - v) \sim \mu R_0^2 \omega \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\rho_l R_0^3 \omega^2}{c\mu} \sim 1$$

$$\frac{\rho_l R_0^2 \omega}{\mu} \cdot \frac{\omega R_0}{c} \sim 1$$

$Re \cdot M \sim 1$

Este Re es el correspondiente al movimiento de traslación de la burbuja en el líquido. El Reynolds de traslación y el del número de Mach tendrán unos órdenes de magnitud entorno a:

$$Re \sim 50, \quad M \sim 0.02$$

Hay que señalar que el número de Reynolds empleado para las adimensionalizaciones, Re_ω , es el asociado a la oscilación de la burbuja y será un orden de magnitud superior al Reynolds de traslación. Lo utilizamos puesto que es el obtenido de forma natural al adimensionalizar las ecuaciones con los parámetros elegidos.

2.6 ECUACIONES ADIMENSIONALES TENIENDO EN CUENTA EL EFECTO DE LA CAPA DE LÍPIDOS DE LA SUPERFICIE DE LA BURBUJA

Oscilaciones radiales de la burbuja:

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2\right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}}\right)a^{-3\gamma}(1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + M\left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a}\right)\right) + \\ - \frac{1}{We}\frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}}a^{-3}(1 - 3M\dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}}\frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)\right) \quad (I)$$

Velocidad del líquido:

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = -\varepsilon M\vec{n}\cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (II)$$

Velocidad de la burbuja:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} + \frac{a^3}{2}\right)\frac{d\vec{v}}{d\tau} = -\frac{3a^3}{2}\varepsilon M\vec{n}\cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) + \frac{9}{8Re_\omega}a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{3}{2}\dot{a}a^2(\vec{u} - \vec{v}) \\ + \frac{(\rho_l - \rho_b)}{4\rho_l}\frac{a^3\vec{G}}{Re_\omega} \quad (III)$$

Posición de la burbuja:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} \quad (IV)$$

2.7 ECUACIONES ADIMENSIONALES SIN TENER EN CUENTA EL EFECTO DE LA CAPA DE LÍPIDOS DE LA SUPERFICIE DE LA BURBUJA

Oscilaciones radiales:

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} \right) a^{-3\gamma} (1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + M \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) - \frac{1}{We} \frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin(M\vec{n} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tau) \right) \quad (I)$$

Velocidad del líquido:

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tau) \quad (II)$$

Velocidad de la burbuja:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} + \frac{a^3}{2} \right) \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -\frac{3a^3}{2} \varepsilon M \vec{n} \cos(M\vec{n} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tau) + \frac{9}{8Re_\omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u} - \vec{v}) + \frac{(\rho_l - \rho_b)}{4\rho_l} \frac{a^3 \vec{G}}{Re_\omega} \quad (III)$$

Posición de la burbuja:

$$\frac{d\vec{\tilde{x}}}{dt} = \vec{v} \quad (IV)$$

2.8 PROBLEMA LINEALIZADO

Proponemos ahora un modelo lineal para las oscilaciones de la burbuja; para ello supondremos que su radio variará poco con respecto a su valor inicial como consecuencia del gradiente de presión al que se ve sometida:

$$a = \frac{R}{R_0} = 1 + \epsilon r, \text{ con } \epsilon \ll 1$$

Sin embargo, este modelo nos permite obtener conclusiones analíticas para amplitudes de la oscilación radial no tan pequeñas.

En caso de que ϵ tuviese un orden de magnitud mayor, aparecerían términos de transferencia de calor en la ecuación que finalmente podríamos modelar variando algunos parámetros: los efectos térmicos son importantes en un rango muy amplio de parámetros, pero finalmente, incluso en el rango no lineal de las oscilaciones radiales, pueden modelarse simplemente con un exponente politrópico menor que el valor isentrópico y con una viscosidad mayor que la del líquido, Prosperetti (1977).

A continuación sustituimos esta expresión en la ecuación adimensionalizada para las oscilaciones radiales correspondiente al caso general (en el que tengamos una capa de lípidos recubriendo la burbuja):

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon r) \cdot (\epsilon \ddot{r}) + \frac{3}{2} (\epsilon \dot{r})^2 = & \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) \cdot (1 + \epsilon r)^{-3\gamma} \cdot (1 - 3\gamma M \epsilon \dot{r}) - \frac{(1 - M \epsilon \dot{r})}{We} \cdot \frac{1}{1 + \epsilon r} \\ & - \frac{1 - 3M \epsilon \dot{r}}{We_{sh}} \cdot (1 + \epsilon r)^{-3} - \frac{1}{Re_\omega} \cdot \left(\frac{\epsilon \dot{r}}{1 + \epsilon r} + M \left(\epsilon \ddot{r} - \frac{(\epsilon \dot{r})^2}{1 + \epsilon r} \right) \right) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \cdot \frac{\epsilon \dot{r}}{(1 + \epsilon r) \cdot (1 - \epsilon r - \delta)} \\ & - \left(\Pi_0 + \epsilon \cdot \text{sen}(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\epsilon \ddot{r}) = & \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) \cdot (1 - 3\gamma \epsilon r) \cdot (1 - 3\gamma M \epsilon \dot{r}) - \frac{(1 - M \epsilon \dot{r})}{We} \cdot (1 - \epsilon r) + \\ & - \frac{1 - 3M \epsilon \dot{r}}{We_{sh}} \cdot (1 - 3\epsilon r) - \frac{1}{Re_\omega} \cdot (\epsilon \dot{r} \cdot (1 - \epsilon r) + M \epsilon \ddot{r}) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \cdot \frac{\epsilon \dot{r}}{1 - \delta} + \\ & - \left(\Pi_0 + \epsilon \cdot \text{sen}(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right) \end{aligned}$$

Puesto que la amplitud adimensional de la onda acústica ϵ es del orden de la amplitud de la oscilación radial adimensional, podemos simplificarlas:

$$\ddot{r} \left(1 + \frac{M}{Re_\omega} \right) + \dot{r} \left(3\gamma M \Pi_0 + \frac{M}{We} (3\gamma - 1) + \frac{M}{We_{sh}} (3\gamma - 3) + \frac{1}{Re_\omega} + \frac{\delta}{Re_{sh}} \frac{1}{(1 - \delta)} \right) +$$

$$r \left(3\gamma \Pi_0 + \frac{1}{We} (3\gamma - 1) + \frac{1}{We_{sh}} (3\gamma - 3) \right) = \text{sen}(M\vec{n} \cdot \vec{\tilde{x}} - \tau)$$

$$\ddot{r} \left(1 + \frac{M}{Re_\omega} \right) + \dot{r} \left(M \cdot \Omega^2 + \frac{1}{Re_\omega} + \frac{\delta}{Re_{sh}} \cdot \frac{1}{(1 - \delta)} \right) + r \cdot \Omega^2 = -\text{sen}(M\vec{n}\vec{\tilde{x}} - \tau) \quad (11)$$

Siendo $\Omega^2 = \left(3\gamma \Pi_0 + \frac{1}{We} (3\gamma - 1) + \frac{1}{We_{sh}} (3\gamma - 3) \right)$

Con el objetivo de verificar si esta aproximación es viable, integraremos la ecuación para las oscilaciones radiales tanto en el caso general como en el lineal y compararemos los resultados.

Éste es el cometido del código de simulación al que llamamos “radialoscilation”. Las condiciones del problema que hemos supuesto para la comparación son las siguientes:

$$R_0 = 5\mu m$$

$$f = 1MHz$$

$$A = 10^4 Pa$$

$$P_0 = 10^5 Pa$$

La integración se realiza durante un tiempo suficientemente largo de modo que la burbuja alcance el régimen estacionario en sus oscilaciones.

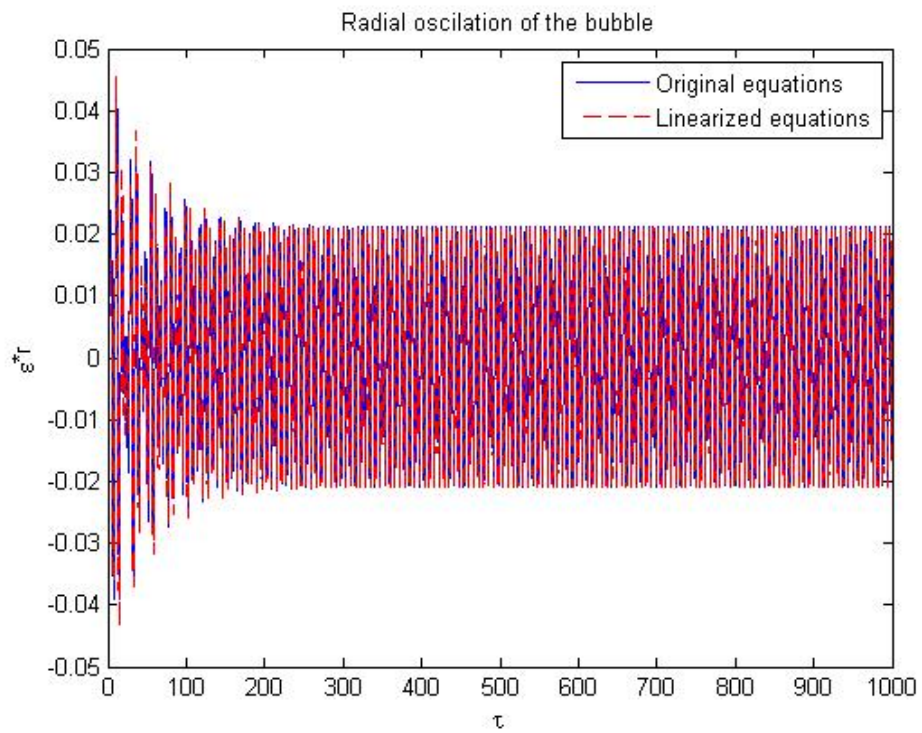


Figura 2.1 Oscilación radial para el modelo lineal y no lineal

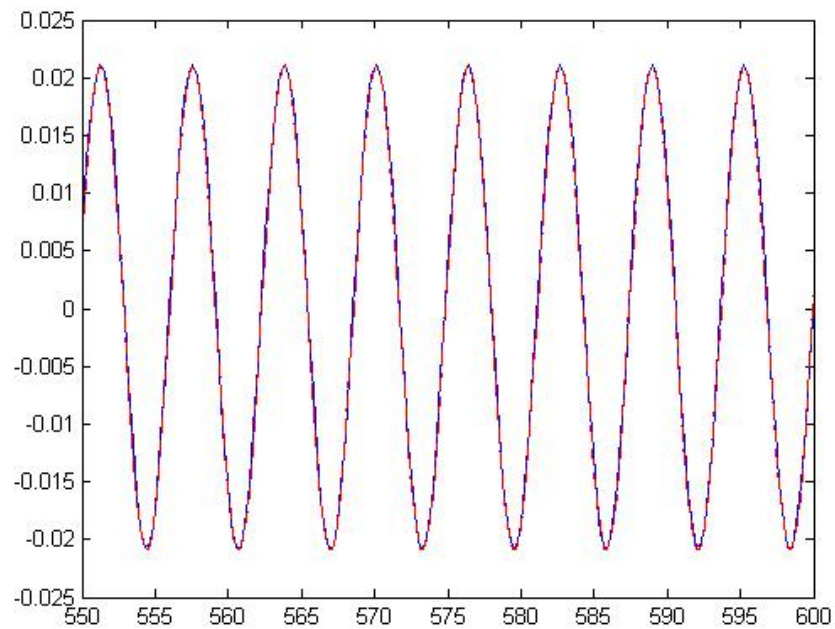


Figura 2.2 Zoom oscilación radial, modelo lineal y no lineal

Como vemos en las gráficas, no cometemos un error significativo al modelar las oscilaciones radiales como lineales, incluso cuando la amplitud de la insonación acústica no es especialmente pequeña, como es el caso.

2.9 ANÁLISIS DE RESONANCIA

Recordamos en este punto que para una misma amplitud del campo de presiones la respuesta de la burbuja dependerá de la frecuencia de la señal, siendo la amplitud de sus oscilaciones máxima cuando la frecuencia de excitación se corresponde con la de resonancia del sistema.

Con este análisis se pretende obtener la expresión que nos relacione la frecuencia de resonancia del sistema con parámetros como el tamaño de burbuja y amplitud de la señal de insonación. Para ello estudiaremos la ecuación para las oscilaciones radiales, adimensionalizándola con respecto a una frecuencia propia del sistema a la que llamaremos ω_c .

El resultado para la ecuación de oscilaciones radiales en forma adimensional será el siguiente:

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) a^{-3\gamma}(1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_{\omega_c}} \left(\frac{\dot{a}}{a} + M \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) + \\ - \frac{1}{We} \frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}} a^{-3}(1 - 3M\dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin \left(M\vec{n} \cdot \vec{\tilde{x}} - \frac{\omega}{\omega_c} \tau \right) \right) \quad (12)$$

Esta ecuación tiene errores del orden M^2 , por lo que sólo es válida para $M \ll 1$, es decir, para longitudes de onda de campo de presión mucho mayores que el radio de la burbuja.

Parámetros adimensionales basados en la frecuencia característica:

$$\Pi_0 = \frac{p_0}{\rho_l R_0^2 \omega_c^2} \quad M = \frac{\omega_c R_0}{c} \quad Re_{\omega} = \frac{\rho_l R_0^2 \omega_c}{4\mu} \quad We_{sh} = \frac{\rho_l R_0^3 \omega_c^2}{2X} \\ We = \frac{\rho_l R_0^3 \omega_c^2}{2\sigma} \quad \varepsilon = \frac{A}{\rho_l R_0^2 \omega_c^2} \quad Re_{sh} = \frac{\rho_l R_0^2 \omega_c}{12\mu_{sh}} \quad \delta = \frac{\delta_{sh}}{R_0}$$

Repetimos este mismo análisis considerando la expresión linealizada para el radio:

$$a = \frac{R}{R_0} = 1 + \epsilon r, \text{ con } \epsilon \ll 1$$

Sustituyendo en (12) y operando nos queda:

$$\ddot{r} \cdot \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + \dot{r} \cdot \left(M \cdot \Omega_c^2 + \frac{1}{Re_{\omega_c}} + \frac{\delta}{Re_{sh}(1-\delta)}\right) + r \cdot \Omega_c^2 = -sen\left(M\vec{n}\vec{x} - \frac{\omega}{\omega_c}\tau\right) \quad (13)$$

Quedando así definida la frecuencia característica del sistema (sin dimensiones y con ellas respectivamente) como:

$$\Omega_c^2 = 3\gamma\Pi_0 + \frac{1}{We}(3\gamma - 1) + \frac{1}{We_{sh}}(3\gamma - 3) \quad (14)$$

$$\omega_c^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_l R_0^2} + \frac{(3\gamma - 1)2\sigma}{\rho_l R_0^3} + \frac{(3\gamma - 3)2X}{\rho_l R_0^3} \quad (15)$$

En el caso particular de burbujas sin capa de lípidos:

$$\begin{aligned} \ddot{r} \cdot \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + \dot{r} \cdot \left(M \cdot \left(3\gamma\Pi_0 + \frac{1}{We}(3\gamma - 1)\right) + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right) + r \cdot \left(3\gamma\Pi_0 + \frac{1}{We}(3\gamma - 1)\right) = \\ = -sen\left(M\vec{n}\vec{x} - \frac{\omega}{\omega_c}\tau\right) \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando además que la burbuja está quieta:

$$\begin{aligned} \ddot{r} \cdot \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + \dot{r} \cdot \left(M \cdot \left(3\gamma\Pi_0 + \frac{1}{We}(3\gamma - 1)\right) + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right) + r \cdot \left(3\gamma\Pi_0 + \frac{1}{We}(3\gamma - 1)\right) = \\ = -sen\left(-\frac{\omega}{\omega_c}\tau\right) = sen\left(\frac{\omega}{\omega_c}\tau\right) \end{aligned} \quad (17)$$

La frecuencia característica para este sistema simplificado sería entonces:

$$\omega_c^2 = \frac{3\gamma p_0}{\rho_l R_0^2} + \frac{(3\gamma - 1)2\sigma}{\rho_l R_0^3}$$

Una vez estudiada la adimensionalización del problema en base a una frecuencia propia del sistema, plantearemos el caso que nos ocupa, es decir, en el que la frecuencia de excitación se corresponde con la frecuencia característica del sistema:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c}, \quad \omega = \omega_c$$

$$\ddot{r} \cdot \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + \dot{r} \cdot \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right) + r = sen\left(\frac{\omega}{\omega_c}\tau\right)$$

$$\ddot{r} \cdot \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + \dot{r} \cdot \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right) + r = sen\left(\frac{\omega}{\omega_c}\tau\right) \quad (18)$$

2.9.1 Frecuencia de resonancia

El radio de la burbuja variará como una onda sinusoidal que podemos expresar de forma compleja como sigue:

$$r(\tau) = Ae^{i\Omega\tau}$$

Sustituimos esta expresión en (18):

$$-\Omega^2 A \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) + i\Omega A \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right) + A = 1 \rightarrow A = \frac{\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)\right) - i\Omega \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right)}{\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right)\right)^2}$$

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)\right)^2 + \left(\Omega \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right)\right)^2}}$$

Por la definición de la frecuencia de resonancia, ésta vendrá dada por el máximo en la amplitud del radio de la burbuja, por lo que procedemos a hallar el máximo de $|A|$:

$$\frac{\partial |A|}{\partial \Omega^2} = -2 \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right) \left(1 - \Omega^2 \left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)\right) + \left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right)^2 = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\left(M + \frac{1}{Re_{\omega_c}}\right)^2}{\left(1 + \frac{M}{Re_{\omega_c}}\right)} \quad (19)$$

2.10 RESULTADOS NUMÉRICOS

2.10.1 Fisicadim

A partir de un rango de radios (entre 1 y 10 μm) y de frecuencias de insonación (entre 0.5 y 9 MHz) dados, el programa nos ofrece una tabla con los parámetros adimensionales M , Re y ε correspondientes. También presenta una tabla con la frecuencia de resonancia teórica dimensional.

Resulta por tanto útil para tener una idea del rango de números adimensionales en los que nos movemos sin perder de vista la física del problema.

2.10.2 Frnum

El objetivo de este programa es comparar la frecuencia de resonancia teórica con la numérica para burbujas de distintos tamaños. La frecuencia de resonancia teórica es la desarrollada anteriormente a partir de la ecuación de oscilaciones radiales, mientras que la numérica se obtiene sometiendo a la burbuja a campos de presiones de distintas frecuencias y seleccionando aquella para que la amplitud de su oscilación radial sea máxima.

Las siguientes figuras presentan los resultados para burbujas de un rango de tamaños entre 5 y 10 micras con saltos de 0.05 micras, insonando a frecuencias entre 0.2 y 0.8 MHz con saltos de 0.1MHz. Sería recomendable repetir la simulación con mayor precisión en las frecuencias de insonación, pues la frecuencia de resonancia teórica que se obtiene es una función escalonada que sigue la misma tendencia que la esperada teóricamente. La elevada capacidad de cálculo exigida para resolver el problema hace que no sea posible realizar la simulación en un ordenador convencional. Ésta falta de precisión implica errores a la hora de calcular Re_ω , M y la amplitud de la resonancia. El hecho de que la amplitud de oscilación sea máxima para los radios de burbujas en los que la frecuencia teórica coincide con la numérica hace que el modelo sea consistente.

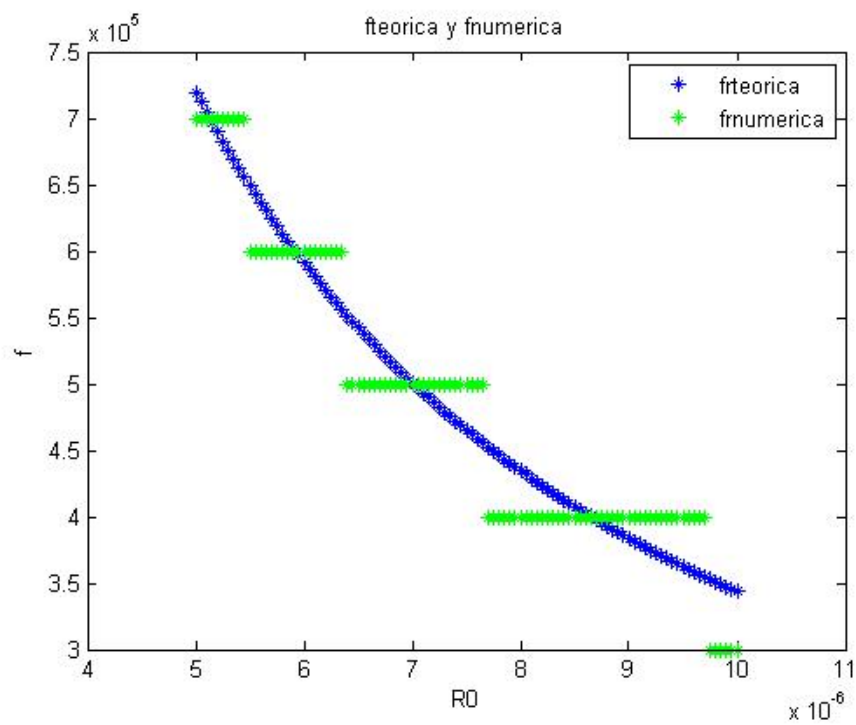


Figura 2.3 Frecuencia de resonancia teórica y numérica

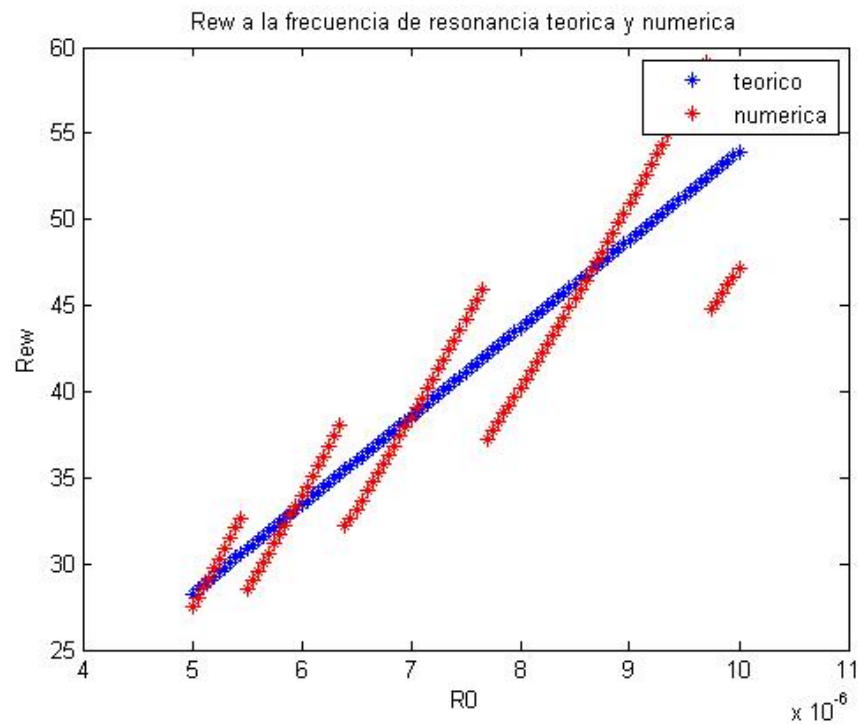


Figura 2.4 Re_w a la frecuencia de resonancia teórica y numérica

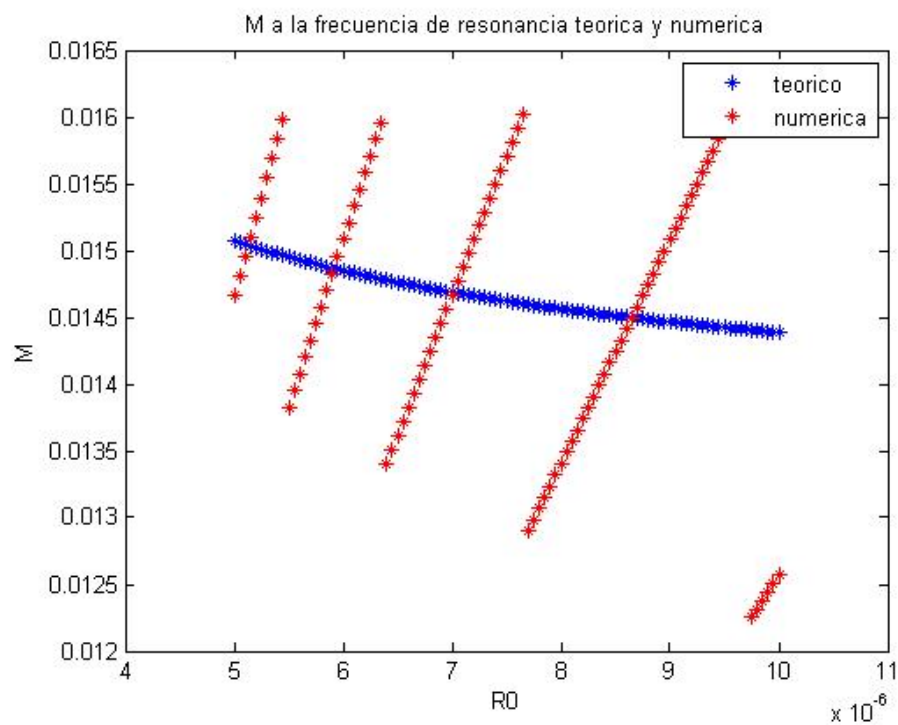


Figura 2.5 M a la frecuencia de resonancia teórica y numérica

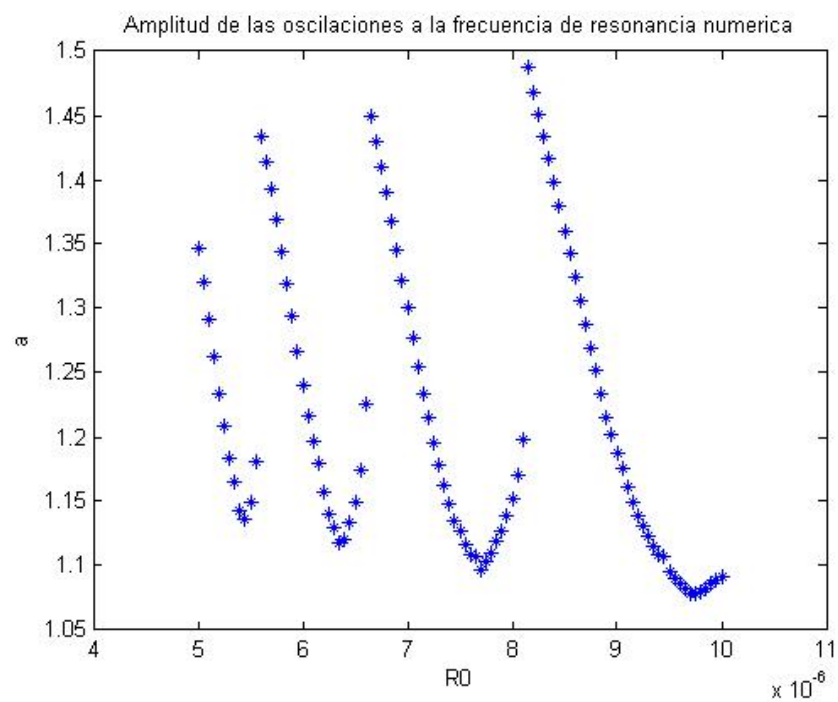


Figura 2.6 Amplitud de las oscilaciones a la frecuencia de resonancia numérica

En esta última gráfica se representa la amplitud de las oscilaciones del radio de la burbuja en el caso en el que se insona a la frecuencia de resonancia. Vemos que se alcanzan amplitudes que se desvían hasta en un 45%-50% del valor inicial del radio. En estos casos, si caracterizamos el radio de la burbuja como $a = 1 + \epsilon r$, el valor de ϵ ya no es mucho menor que 1, por lo que a la frecuencia de resonancia la aproximación lineal del radio no es tan precisa.

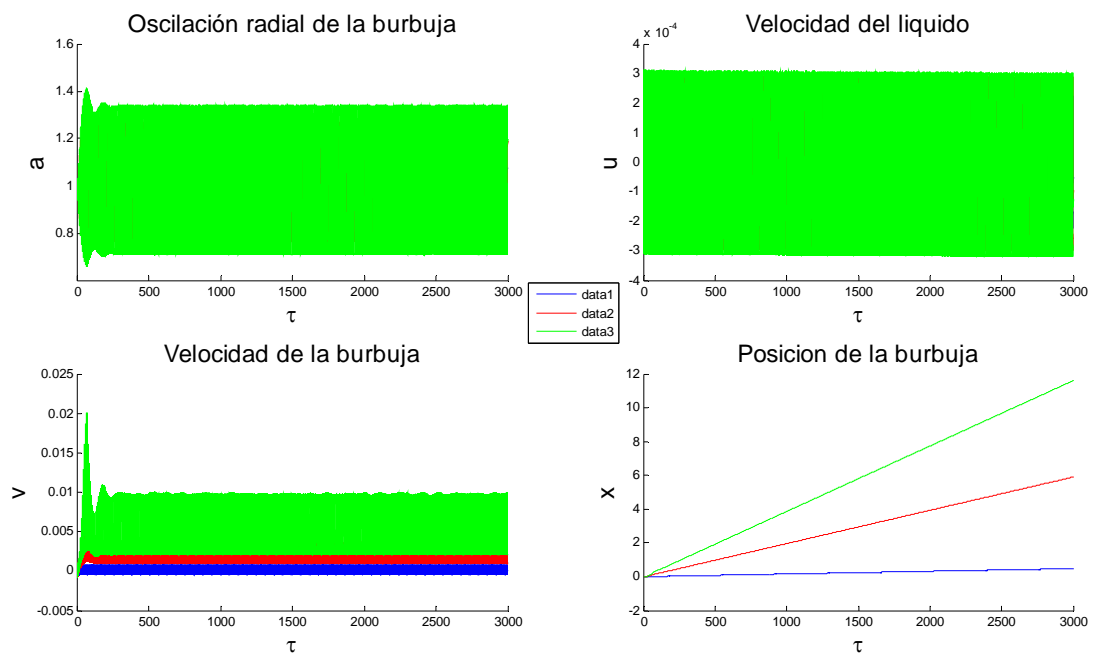
2.10.3 Arvectorial

Describe el comportamiento de burbujas de un determinado tamaño en el seno de un campo acústico resolviendo el sistema dado por las ecuaciones (4), (6), (8) y (10), es decir, las ecuaciones para la oscilación radial, la velocidad del líquido y de la burbuja y su posición para el caso general. Además proporciona el valor de la frecuencia de resonancia teórica del sistema. Su formato vectorial permite comparar el comportamiento de distintos tamaños de microburbujas sometidas a distintas variaciones de presión. A continuación se muestran los resultados para las siguientes condiciones:

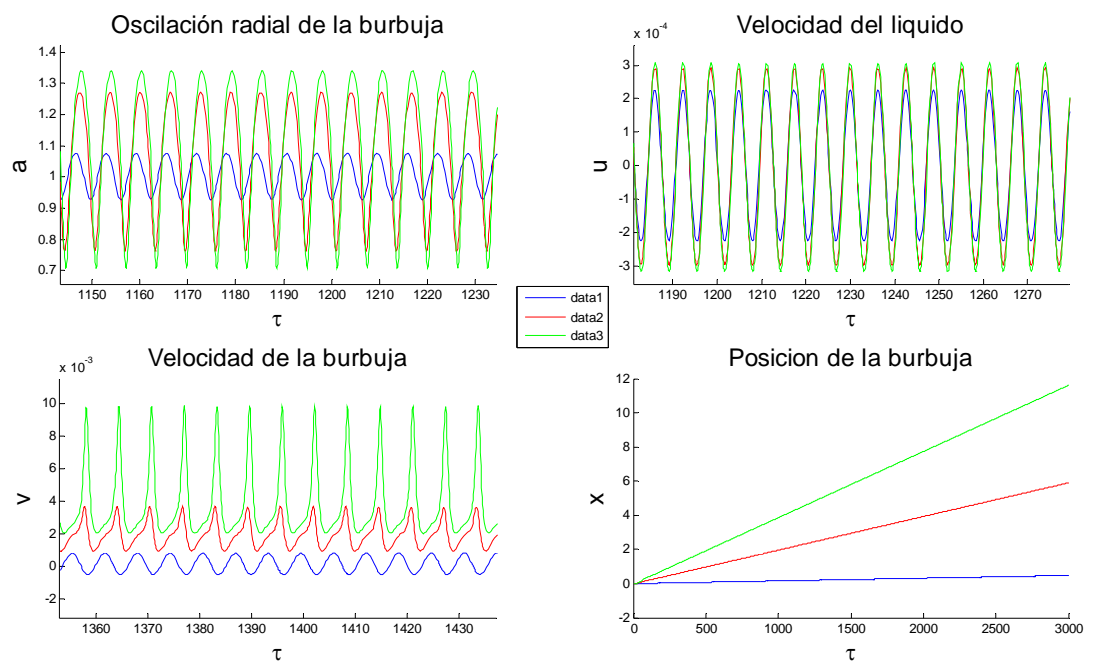
Datos azules $\equiv [R_0 = 1\mu m, f_r = 4.69\text{ MHz}, A = 10^4 Pa]$

Datos rojos $\equiv [R_0 = 5\mu m, f_r = 0.72\text{ MHz}, A = 10^4 Pa]$

Datos verdes $\equiv [R_0 = 10\mu m, f_r = 0.34\text{ MHz}, A = 10^4 Pa]$



(zoom)



**Figuras 2.7 Oscilación radial, velocidad del líquido y de la burbuja
y posición de la burbuja**

CAPÍTULO 3: ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS ESCALAS TEMPORALES MÚLTIPLES

3.1 HIPÓTESIS

En nuestro problema estamos considerando el movimiento de una burbuja en el seno de un campo fluido estacionario de velocidad $\vec{u}_0(\vec{x})$ y presión $P_0(\vec{x})$ sobre la que actúa una onda acústica plana de amplitud A y frecuencia angular ω . La presión que actúa sobre la burbuja será entonces:

$$P(\vec{x}, t) = P_0(\vec{x}, t) + A \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Para este estudio consideraremos el régimen lineal, es decir, oscilaciones radiales de pequeña amplitud ($a = 1 + \epsilon r$, $\epsilon \ll 1$), para el cual son válidas las siguientes hipótesis:

- Hip.1. El problema presenta dos tiempos característicos, Toilliez y Szeri (2008):

- Un tiempo corto, característico de la oscilación radial de la burbuja

$$\tau = t_{osc} \sim \frac{1}{\omega}$$

- Un tiempo largo, o tiempo característico de residencia de la burbuja en el campo fluido considerado

$$t = t_{res} \sim \epsilon t, \epsilon \ll 1$$

- Hip.2. El fluido externo a la burbuja presenta un flujo estacionario que es perturbado por el gradiente de presión introducido por la onda acústica, por lo que parece intuitivo pensar que podemos descomponer su campo de presiones y de velocidades en un valor medio y un valor fluctuante. Proponemos para ello la descomposición de Reynolds, que impone como condición que el promedio temporal de las fluctuaciones de las variables estudiadas (que son periódicas de periodo $\tilde{T} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$) sea nulo a lo largo de un periodo.

Dicho promedio temporal viene dado por la siguiente expresión:

$$\langle \cdot \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\cdot) d\tau$$

$$(a) \quad P(\vec{x}, t) = P_0(\vec{x}) + P'(\vec{x}, \tau), \quad \langle P' \rangle = 0$$

$$(b) \quad \vec{u} = \vec{u}_0(\vec{x}) + \vec{u}'(\tau), \quad \langle \vec{u}' \rangle = 0$$

- Hip.3. Una descomposición similar es aplicable a las variables de la burbuja:

$$(c) \quad \vec{v} = \vec{v}_0(t) + \vec{v}'(\tau), \quad \langle \vec{v}' \rangle = 0$$

$$(d) \quad \vec{x} = \vec{x}_0(t) + \vec{x}'(\tau), \quad \langle \vec{x}' \rangle = 0$$

Adviértase que las fluctuaciones de las velocidades dependen únicamente de τ y no de la posición dentro del campo fluido ya que para este análisis tomaremos el punto de vista Lagrangiano, es decir, estudiamos el comportamiento de la burbuja siguiéndola en su movimiento.

Nótese asimismo que las variables del campo fluido externo presentan un valor medio que no depende del tiempo, sino de la posición dentro del campo, mientras que el valor medio de las variables de la burbuja depende del tiempo de residencia: en el tiempo corto se ven las fluctuaciones y el valor medio es tomado como constante, pero para un tiempo 't' grande veremos que el valor promedio de los tiempos cortos varía.

Como puede apreciarse, dentro de las variables de la burbuja a las que se ha aplicado la descomposición de Reynolds no se incluye el radio; esto se debe a que el radio de la burbuja fluctúa con ' τ ', pero presenta un valor promedio constante en el tiempo:

$$\overline{a(\tau)} \equiv cte$$

3.2 ANÁLISIS DE ÓRDENES DE MAGNITUD

A continuación aplicaremos la descomposición de Reynolds planteada a las ecuaciones adimensionalizadas que se desarrollaron en el apartado 2.

- **Ecuación para las oscilaciones radiales**

Puesto que no se aplica la descomposición en escalas temporales al radio de la burbuja, esta ecuación permanece inalterada.

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) a^{-3\gamma}(1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + M \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) +$$

$$- \frac{1}{We} \frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}} a^{-3}(1 - 3M\dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin(M\vec{n}\vec{\tilde{x}} - \tau) \right) \quad (1)$$

- **Ecuación para la velocidad del líquido**

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M\vec{n}\vec{\tilde{x}} - \tau)$$

$$\frac{d(\vec{u}_0(\vec{x}) + \vec{u}'(\tau))}{d\tau} = \frac{d\vec{u}'}{d\tau}$$

$$\frac{d\vec{u}'}{d\tau} = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (2)$$

- Ecuación para la velocidad de la burbuja

$$\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -a^3 \nabla \tilde{P} + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (a^3(\vec{u} - \vec{v})) + \frac{\rho_l - \rho_b}{4\rho_l} a^3 \frac{\vec{G}}{Re_\omega}$$

Antes de aplicar la descomposición en escalas temporales despreciaremos para este análisis el término de flotabilidad puesto que es muy pequeño en comparación con la fuerza viscosa o la fuerza de Bjerknes y su presencia no será necesaria para justificar los resultados que se desprendan de esta parte del estudio.

Por tanto, la ecuación de la que partimos será:

$$\frac{\rho_{b0}}{\rho_l} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = -a^3 \nabla \tilde{P} + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (a^3(\vec{u} - \vec{v}))$$

Aplicamos inicialmente la descomposición de Reynolds a la velocidad del líquido e introducimos la aproximación acústica del campo de presiones:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}}{\rho} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & -a^3 \left(\nabla \tilde{P}_0 + \varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a \left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (a^3(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{b0}}{\rho} \frac{d\vec{v}}{d\tau} = & -a^3 \left(\nabla \tilde{P}_0 + \varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a \left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v} \right) + \\ & + \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{u}_0}{d\tau} + \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{u}'}{d\tau} + \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 \left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{b0}}{\rho} \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= -a^3 \left(\nabla \tilde{P}_0 - \frac{1}{2} \frac{d\vec{u}_0}{d\tau} \right) + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a (\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) + \\ &\quad - \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{1}{2} a^3 \frac{d\vec{u}'}{d\tau} - a^3 \varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \\ \Downarrow \frac{d\vec{u}'}{d\tau} &= -\nabla \tilde{P}' = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} a^3 \right) \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= -a^3 \left(\nabla \tilde{P}_0 - \frac{1}{2} \frac{d\vec{u}_0}{d\tau} \right) + \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) \\ &\quad + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a (\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) - \frac{3}{2} a^3 \varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)\end{aligned}$$

Para hacernos una idea del orden de magnitud del término de valores medios vamos a comparar el gradiente de la presión externa con el término dominante, que es el correspondiente al gradiente de la presión acústica (fuerza de Bjerknes):

$$\frac{\nabla P_0}{AM} \sim \frac{\rho R_0^2 \omega^2 \cdot R_0 \cdot \frac{1}{L} \cdot \mu \cdot \frac{u_0}{L}}{\varepsilon \cdot \rho R_0^2 \omega^2 \cdot \frac{\omega R_0}{c}} \sim \frac{\mu \cdot \frac{u_0}{L}}{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda}{L} \ll 1$$

- Para un flujo de Re bajo, como el nuestro, $\frac{\mu \cdot \frac{u_0}{L}}{A} \ll 1$
Esto quiere decir que las variaciones de presión son pequeñas comparadas con la presión acústica.
- Además, una de las hipótesis de partida para nuestro problema es $\frac{\lambda}{L} \ll 1$, es decir, que la longitud de onda del campo acústico es mucho menor que la longitud característica del campo fluido.

Estimamos ahora el orden de magnitud del otro componente del término de valores medios:

$$\rho \frac{d\vec{u}_0}{d\tau} = \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{u}_0 \sim \frac{v}{u_0} \nabla P_0$$

Por tanto, a menos que $\frac{v}{u_0} \gg 1$ (lo cual no suele ser el caso), podremos despreciar el término de valores medios, quedando la siguiente ecuación como resultante del equilibrio de fuerzas sobre la burbuja:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2\left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}\right) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a\left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}\right) - \frac{3}{2}a^3\varepsilon M\vec{n}\cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (3)$$

Aplicaremos ahora la descomposición de Reynolds a las variables de la burbuja bajo las siguientes hipótesis:

$$\frac{d\vec{x}_0}{d\tau} = \vec{v}_0, \quad \frac{d\vec{x}'}{d\tau} = \vec{v}'$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d(\vec{v}_0 + \vec{v}')}{d\tau} &= \frac{3}{2}\dot{a}a^2\left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}_0 - \vec{v}'\right) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a\left(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}_0 - \vec{v}'\right) + \\ &\quad - \frac{3}{2}a^3\varepsilon M\vec{n}\cos\left(M\vec{n} \cdot (\vec{x}_0 + \vec{x}') - \tau\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d(\vec{v}_0 + \vec{v}')}{d\tau} &= \frac{3}{2}\dot{a}a^2(\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \frac{3}{2}\dot{a}a^2(\vec{u}' - \vec{v}') + \frac{9}{8}Re_\omega^{-1}a(\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \\ &\quad + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(\vec{u}' - \vec{v}') + - \frac{3}{2}a^3\varepsilon M\vec{n}\cos\left(M\vec{n} \cdot (\vec{x}_0 + \vec{x}') - \tau\right) \end{aligned}$$

- **Ecuación para la posición de la burbuja**

Partimos de esta ecuación adimensional:

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v}$$

Aplicando la descomposición de Reynolds obtenemos las hipótesis empleadas para la descomposición en el equilibrio de fuerzas sobre la burbuja.

$$\frac{d\vec{x}_0}{d\tau} = \vec{v}_0, \quad \frac{d\vec{x}'}{d\tau} = \vec{v}' \quad (4)$$

3.3 PROMEDIADO DE LAS ECUACIONES

En el apartado anterior llevamos a cabo la descomposición de las variables en las dos escalas temporales del problema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(\vec{x}, t) &= P_0(\vec{x}) + P'(\vec{x}, \tau), & \langle P' \rangle &= 0 \\ \vec{u}(t, \tau) &= \vec{u}_0(\vec{x}) + \vec{u}'(\tau), & \langle \vec{u}' \rangle &= 0 \\ \vec{x}(t, \tau) &= \vec{x}_0(t) + \vec{x}'(\tau), & \langle \vec{x}' \rangle &= 0 \\ \vec{v}(t, \tau) &= \vec{v}_0(t) + \vec{v}'(\tau), & \langle \vec{v}' \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Donde t equivale al tiempo largo y τ equivale al tiempo corto.

Una vez diferenciadas las dos escalas temporales, nos dispondremos a promediar las ecuaciones para el tiempo largo ' t ', de modo que perdamos resolución de lo que ocurre a escalas más pequeñas y podamos ver la evolución del líquido y la burbuja durante el tiempo de residencia de ésta en el campo fluido.

El problema de haber realizado esa descomposición de las variables es que hemos introducido en el problema dos escalas temporales que tenemos que relacionar:

En el tiempo corto observamos las fluctuaciones del valor respecto a un valor medio constante: $w'(\tau)$. Para el tiempo largo, dejamos de visualizar las fluctuaciones y vemos un valor (correspondiente al valor medio para tiempos cortos) que varía con el tiempo largo, y que se corresponde con

$$\langle w(t) \rangle \equiv w_0(t).$$

$t = \varepsilon \tau$ con $\varepsilon \downarrow$ (cuando t ha variado del orden de $\sim \frac{2\pi}{\omega}$, τ prácticamente no se ha enterado).

Transformaremos nuestras ecuaciones en ecuaciones diferenciales para un único tiempo de la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{dw(t, \tau)}{d\tau} \right\rangle = \frac{d \langle w(t, \tau) \rangle}{dt} \varepsilon + \left\langle \frac{dw'(t, \tau)}{d\tau} \right\rangle$$

$\left\langle \frac{dw'(t, \tau)}{d\tau} \right\rangle = 0$ por la propia definición de promedio que estamos empleando y por la condición impuesta por la descomposición de Reynolds utilizada

$$\left\langle \frac{dw(t, \tau)}{d\tau} \right\rangle = \frac{d \langle w \rangle}{dt} \varepsilon = \frac{d \langle w \rangle}{d(\frac{t}{\varepsilon})} = \frac{d \langle w \rangle}{dt}$$

Por ello, directamente omitimos la diferencia entre tiempos largos y cortos en las ecuaciones, ya que como hemos comprobado finalmente nos queda una ecuación equivalente que nos dará la evolución de las distintas variables para tiempos largos.

- Ecuación para las oscilaciones radiales

Como ya explicamos en el apartado anterior, no aplicaremos la descomposición de Reynolds al radio de la burbuja puesto que su valor promedio es constante con el tiempo y porque además no satisface la condición impuesta a las fluctuaciones: las fluctuaciones del radio no pueden tener un promedio nulo pues la burbuja no puede alcanzar radios negativos.

Igualmente no tiene sentido promediar la ecuación para las oscilaciones radiales ya que a tiempos largos se pierde información de lo que ocurre a escalas pequeñas y por tanto la oscilación radial resulta nula.

$$\left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2\right) = \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}}\right)a^{-3\gamma}(1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega}\left(\frac{\dot{a}}{a} + M\left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a}\right)\right) + \frac{1}{We}\frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}}a^{-3}(1 - 3M\dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}}\frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} - \left(\Pi_0 + \varepsilon \sin(M\vec{n}\vec{x} - \tau)\right) \quad (5)$$

- Ecuación para la velocidad del líquido

$$\frac{d\vec{u}'}{d\tau} = -\varepsilon M\vec{n}\cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)$$

$$\left\langle \frac{d\vec{u}'}{d\tau} \right\rangle = 0 \quad (6)$$

- Ecuación para la velocidad de la burbuja

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{9}{8}Re_\omega^{-1}a(\vec{u} - \vec{v}) - \frac{3}{2}a^3\varepsilon M\vec{n}\cos(M\vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (3)$$

Puesto que el promediado de esta ecuación es más complejo, lo haremos término a término:

Primer término

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d\vec{v}}{d\tau} \right\rangle &= \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho}\right)\frac{d\langle \vec{v}_0 + \vec{v}' \rangle}{d\tau} + \left\langle \frac{1}{2}a^3\frac{d(\vec{v}_0 + \vec{v}')}{d\tau} \right\rangle = \\ &= \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho}\right)\frac{d\vec{v}_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\langle a^3 \rangle \frac{d\vec{v}_0}{d\tau} + \frac{1}{2}\langle a^3 \frac{d\vec{v}}{d\tau} \rangle \end{aligned}$$

Podemos integrar por partes el último término:

$$\langle a^3 \frac{d\vec{v}}{d\tau} \rangle = \frac{1}{2\pi} \left((a^3 \vec{v}')_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \vec{v}' 3a^2 \dot{a} dt \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \vec{v}' 3a^2 \dot{a} dt \right) = 3 \langle a^2 \dot{a} \vec{v}' \rangle$$

Por lo tanto

$$\langle \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} a^3 \right) \frac{d\vec{v}}{d\tau} \rangle = \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} \langle a^3 \rangle \right) \frac{d\vec{v}_0}{d\tau} - \frac{3}{2} \langle \vec{v}' a^2 \dot{a} \rangle$$

Segundo término

$$\begin{aligned} \langle \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u} - \vec{v}) \rangle &= \frac{3}{2} \langle \dot{a} a^2 ((\vec{u}_0 + \vec{u}') - (\vec{v}_0 + \vec{v}')) \rangle = \\ &= \frac{3}{2} (\langle \dot{a} a^2 \rangle (\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \langle \dot{a} a^2 \vec{u}' \rangle - \langle \dot{a} a^2 \vec{v}' \rangle) \end{aligned}$$

Asumiendo que la oscilación es periódica:

$$\langle \dot{a} a^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \dot{a}^3 \rangle = 0$$

Además, se puede volver a integrar por partes y teniendo en cuenta la ecuación (2) se puede afirmar:

$$\begin{aligned} \langle \dot{a} a^2 \vec{u}' \rangle &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{a^3}{3} \vec{u}'_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} \frac{d\vec{u}'}{dt} dt \right] = -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} \frac{d\vec{u}'}{dt} dt \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (-\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)) dt \right] = \frac{1}{3} \varepsilon M \vec{n} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} a^3 (\cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)) dt \right] \\ &= \frac{1}{3} \varepsilon M \vec{n} \langle a^3 (\cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)) \rangle \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\langle \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\vec{u} - \vec{v}) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon M \vec{n} \langle a^3 (\cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau)) \rangle - \frac{3}{2} \langle \dot{a} a^2 \vec{v}' \rangle$$

Tercer término

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{9}{8} Re_{\omega}^{-1} a(\vec{u} - \vec{v}) \right\rangle &= \frac{9}{8} Re_{\omega}^{-1} \left(\left\langle a \cdot \left((\vec{u}_0 + \vec{u}') - (\vec{v}_0 + \vec{v}') \right) \right\rangle \right) = \\ &= \frac{9}{8} Re_{\omega}^{-1} \left(\left\langle a \right\rangle (\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \left\langle a \vec{u}' \right\rangle - \left\langle a \vec{v}' \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Uniendo todos los términos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} \left\langle a^3 \right\rangle \right) \frac{d\vec{v}_0}{d\tau} - \frac{3}{2} \left\langle a^2 \dot{a} \vec{v}' \right\rangle &= \frac{1}{2} \varepsilon M \vec{n} \left\langle a^3 \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right\rangle - \frac{3}{2} \left\langle \dot{a} a^2 \vec{v}' \right\rangle + \\ &+ \frac{9}{8} Re_{\omega}^{-1} \left(\left\langle a \right\rangle (\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \left\langle a \vec{u}' \right\rangle - \left\langle a \vec{v}' \right\rangle \right) - \frac{3}{2} \varepsilon M \vec{n} \left\langle a^3 \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right\rangle \end{aligned}$$

$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} \left\langle a^3 \right\rangle \right) \frac{d\vec{v}_0}{d\tau} &= -\varepsilon M \vec{n} \left\langle a^3 \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \right\rangle \\ &+ \frac{9}{8} Re_{\omega}^{-1} \left(\left\langle a \right\rangle (\vec{u}_0 - \vec{v}_0) + \left\langle a \vec{u}' \right\rangle - \left\langle a \vec{v}' \right\rangle \right) \quad (7) \end{aligned}$
--

- Ecuación para la posición de la burbuja

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v}$$

$\frac{d\vec{x}_0}{d\tau} = \vec{v}_0, \quad \frac{d\vec{x}'}{d\tau} = \vec{v}' \quad (8)$
--

Este análisis del problema a través del método de las múltiples escalas temporales será validado en el siguiente capítulo considerando un flujo externo concreto.

CAPÍTULO 4: VALIDACIÓN NUMÉRICA DEL ANÁLISIS MEDIANTE EL MÉTODO DE LAS ESCALAS TEMPORALES MÚLTIPLES

Para validar el estudio del problema realizado en el capítulo anterior, vamos a proponer un caso concreto dado por un flujo externo conocido en el que situaremos a la burbuja y podremos observar la evolución de la misma para tiempos largos.

4.1 CAMPO FLUIDO EXTERNO

Queremos comprobar que el estudio del problema desde el punto de vista de las escalas temporales múltiples tiene validez, por lo será aplicado a un caso en el que el flujo externo sea sencillo y tenga solución analítica ya que así conoceremos de antemano su respuesta y podremos comparar con ella los resultados de nuestro análisis.

El flujo externo escogido para esta comparación se conoce como contraflujo. Las ecuaciones que lo definen son las siguientes:

$$u_{0x} = mx \quad u_{0y} = -my$$

Donde m es una constante de valor conocido.

Puesto que conocemos la expresión analítica del campo fluido, podremos determinar el tiempo de residencia de la burbuja en el mismo con mayor precisión. Quedan por tanto determinadas las escalas de tiempos del problema:

$t_{osc} \sim \omega^{-1}$ Tiempo característico de oscilación radial de la burbuja

$t_{res} \sim m^{-1}$ Tiempo de residencia característico en el campo fluido considerado

Para poder observar muchas oscilaciones de nuestra burbuja dentro del rango de validez del campo fluido se tiene que cumplir la siguiente relación entre ambas escalas de tiempo:

$$\frac{t_r}{t_{osc}} \sim \frac{\omega}{m} \gg 1$$

En los siguientes apartados se proponen distintas formas de verificar nuestro análisis de forma numérica.

4.2 VALIDACIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

En primer lugar partiremos de las ecuaciones adimensionalizadas desarrolladas en el apartado de “Análisis de órdenes de magnitud” correspondiente al Capítulo 3, en el que se introduce la aproximación acústica del campo de presiones en las ecuaciones generales y se aplica la descomposición de Reynolds a la velocidad del líquido.

Ya que el campo fluido considerado está definido para las direcciones “x” e “y”, proyectaremos nuestras ecuaciones, salvo la correspondiente a la oscilación radial, sobre las direcciones coordenadas, para lo cual será necesario determinar cuál es nuestro vector normal \vec{n} : vamos a considerar que la insonación se produce en la dirección ‘y’ con sentido de arriba abajo. Por tanto el vector normal será $\vec{n} = -\vec{e}_y$

Las ecuaciones proyectadas resultantes son las siguientes:

1. Ecuación para la velocidad del líquido

$$\frac{d\vec{u}'}{d\tau} = -\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\widetilde{u}'_x}{d\tau} = 0 \\ \frac{d\widetilde{u}'_y}{d\tau} = \varepsilon M \cos(-My - \tau) \end{array} \right\}$$

2. Ecuación para la velocidad de la burbuja

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right) \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(\vec{u}_0 + \vec{u}' - \vec{v}) - \frac{3}{2}a^3\varepsilon M \vec{n} \cos(M \vec{n} \cdot \vec{x} - \tau) \quad (3)$$

Proyección sobre la coordenada X:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right) \frac{d\widetilde{v}_x}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(m \cdot x + \widetilde{u}'_x - \widetilde{v}_x) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(m \cdot x + \widetilde{u}'_x - \widetilde{v}_x)$$

Proyección sobre la coordenada Y:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right) \frac{d\widetilde{v}_y}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(-m \cdot y + \widetilde{u}'_y - \widetilde{v}_y) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(-m \cdot y + \widetilde{u}'_y - \widetilde{v}_y) + \frac{3}{2}a^3\varepsilon M \cos(-My - \tau)$$

3. Ecuación para la posición de la burbuja

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \tilde{v}_x \\ \frac{dy}{d\tau} = \tilde{v}_y \end{cases}$$

Integraremos estas ecuaciones junto con la ecuación para las oscilaciones radiales imponiendo como condiciones iniciales el valor inicial del radio, la amplitud de la onda acústica y la posición inicial de la burbuja en el campo fluido. El resto de variables presentarán condición inicial nula.

Para los ejemplos que se presentan más adelante tomaremos estas condiciones:

$$R_0 = 10\mu m$$

$$A = 10^3 Pa$$

$$m = 500s^{-1}$$

$$\tau_{integración} = \tau_r = 5 \cdot 10^3$$

Esta integración tiene lugar en el programa “bjerflow” que se adjunta al final de la memoria. Para probar este código supondremos condiciones límite como las siguientes:

4.2.1 Partícula pesada

Para este caso, la relación de densidades entre la burbuja y el fluido debe ser:

$$\frac{\rho_b}{\rho} \sim 10$$

La burbuja hace las veces de un perdigón de acero, por lo que debe seguir una trayectoria recta hasta que empieza a afectarle el rozamiento y finalmente se alinea con las líneas de corriente del campo fluido para distancias muy largas.

Si observamos la ecuación 3, que nos da la expresión para la velocidad de la burbuja, vemos que la aceleración de la burbuja está multiplicada por un factor $\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)$. Las oscilaciones radiales son de orden unidad, mientras que en este caso la relación de densidades es de un orden de magnitud superior. Esto quiere decir que el movimiento de la burbuja estará

dominado por los términos inerciales, siendo mucho menor la influencia de la fuerza de Bjerknes. Tal y como hemos mencionado anteriormente, esto será así hasta que los efectos del rozamiento se hagan demasiado grandes y finalmente obliguen a la partícula a seguir al campo fluido, amortiguando su movimiento inicial.

Como vemos a continuación, para la ecuación de la velocidad de la burbuja en la dirección ortogonal a la de insonación tenemos un término lineal y un término amortiguador, que es \tilde{v}_x :

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\frac{d\tilde{v}_x}{d\tau} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(m \cdot x + \tilde{u}_x - \tilde{v}_x) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(m \cdot x + \tilde{u}_x - \tilde{v}_x)$$

$$\Downarrow \tilde{v}_x = \frac{d\tilde{x}}{dt}$$

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\ddot{x} = \frac{3}{2}\dot{a}a^2(m \cdot x + \tilde{u}_x - \tilde{v}_x) + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a(m \cdot x + \tilde{u}_x - \tilde{v}_x)$$

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2}a^3\right)\ddot{x} = \left(\frac{3}{2}\dot{a}a^2 + \frac{9}{8}\frac{1}{Re_\omega}a\right)(m \cdot x + \tilde{u}_x - \tilde{v}_x)$$

Partiendo de una posición (4,15), el resultado es:

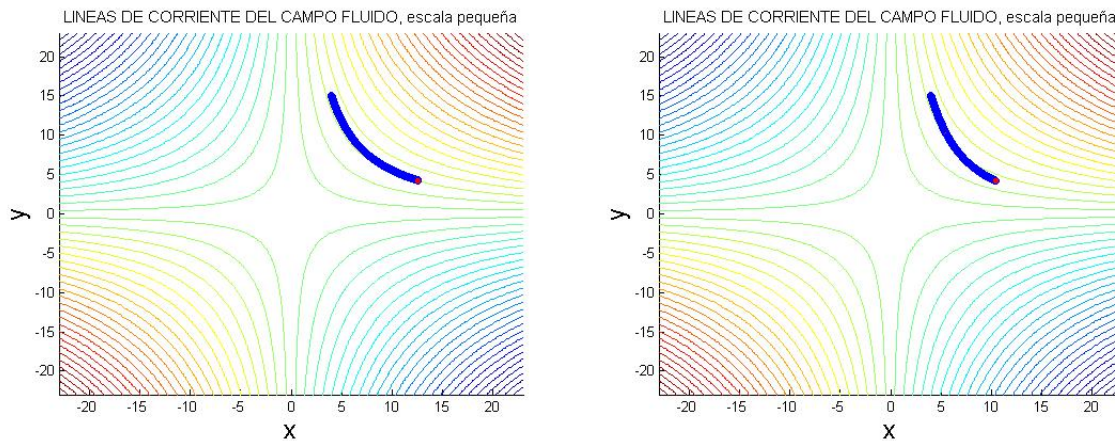


Figura 4.1 Burbuja (izquierda) vs partícula infinitamente pesada (derecha)

Como se puede observar, en el caso en el que la partícula es más pesada que el fluido externo, ésta sigue una línea recta aproximadamente durante la mitad de su tiempo de residencia en el campo, comenzando a desviarse para seguir las líneas de corriente en la segunda mitad. Se advierte por tanto en comparación con el caso de la burbuja que el rozamiento le afecta más tarde al ser más pesada.

4.2.2 Velocidad inicial nula de la partícula

Al tener velocidad inicial nula, la partícula permanece quieta en su posición inicial sin enterarse del campo fluido a su alrededor hasta que el rozamiento se hace muy grande y hace que la partícula comience a seguir las líneas de corriente del campo.

4.2.3 Partícula con velocidad inicial

En este caso, puesto que la partícula parte con una velocidad inicial determinada, ha de continuar moviéndose con esa misma velocidad, describiendo una trayectoria rectilínea, hasta que el rozamiento cobra la suficiente importancia y hace que la partícula finalmente se alinee con el campo fluido.

Damos a la partícula la velocidad inicial correspondiente a su posición inicial en el campo fluido.

Comparamos estos casos, en los que la partícula parte sin velocidad inicial o con ella, considerando una posición inicial de $(-3,-3)$:

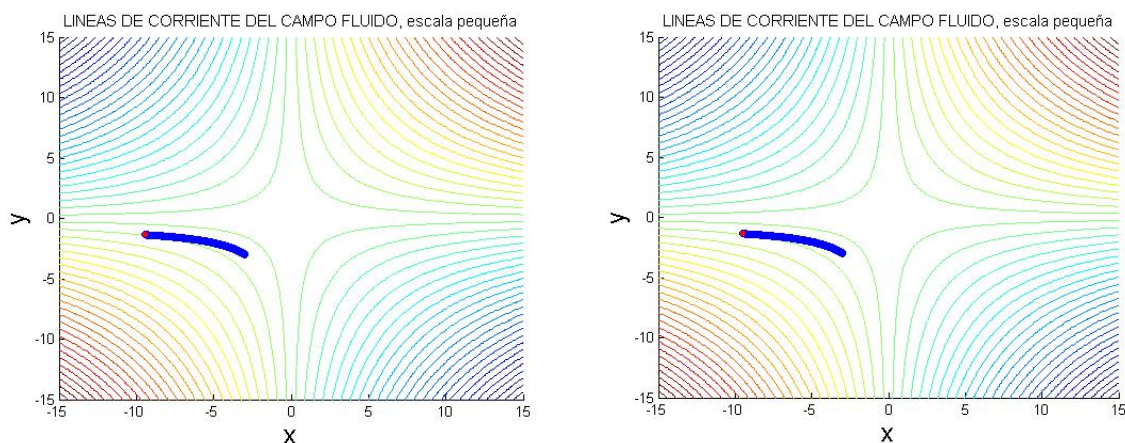


Figura 4.2 Burbuja con velocidad inicial nula (izquierda) vs burbuja con velocidad de partida

En este caso la diferencia entre la trayectoria de la burbuja en ambos casos apenas se diferencia puesto que estamos utilizando un campo fluido de elevada intensidad, pero si nos fijamos bien podemos ver como cuando la burbuja presenta una velocidad inicial igual a la correspondiente a su posición en el campo, continúa moviéndose con esa velocidad durante un cierto tiempo hasta que la fricción ejercida por el campo hace que finalmente siga sus líneas de corriente.

Otro factor que permite diferenciar ambos casos es la longitud recorrida: cuando la burbuja parte del reposo, continúa sin moverse durante un tiempo; por ello, en un mismo tiempo de residencia en el campo la burbuja que parte del reposo recorrerá una distancia menor.

4.2.4 Ausencia de campo fluido

En este caso el “stream rate” del campo fluido es nulo: $m=0$. Es decir, la burbuja se moverá únicamente por efecto de la fuerza de Bjerknes, no existiendo contribución del movimiento del campo fluido en el que se desplaza.

El tiempo de residencia será infinito medido en unidades de tiempo de oscilación.

Para una posición inicial de (5,5) el resultado es este:

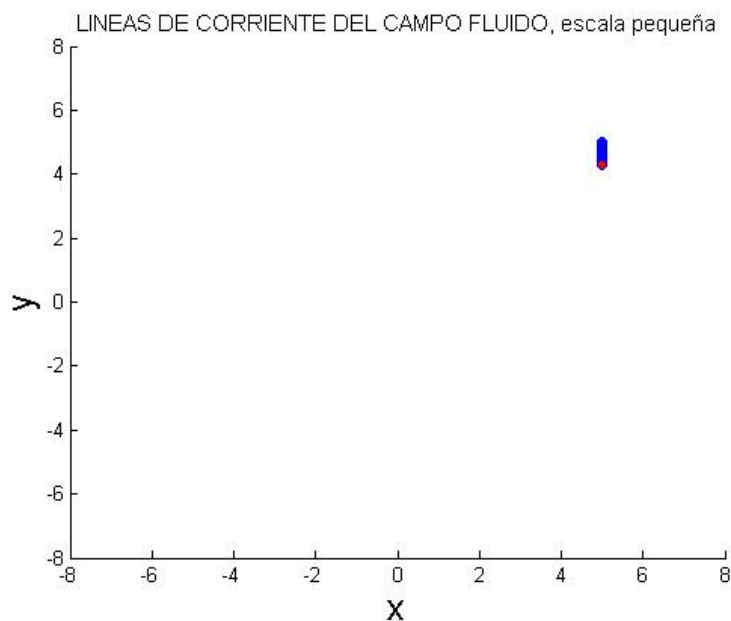


Figura 4.3 Burbuja en ausencia de campo fluido

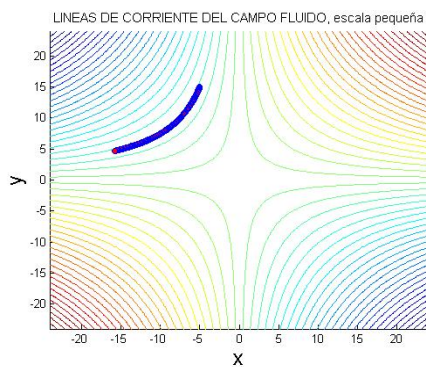
Vemos que, como la partícula se mueve únicamente como consecuencia de la fuerza de Bjerknes, su trayectoria tiene la misma dirección y sentido que la insonación acústica, vertical y hacia abajo. Se observa una pequeña desviación de la trayectoria respecto a la dirección vertical, la cual se debe a los efectos inerciales.

4.2.5 Ausencia de insonación

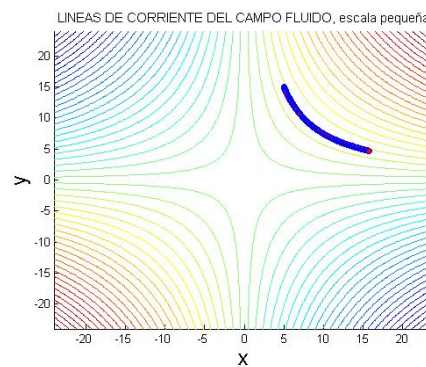
Este caso es el contrario al anterior: ahora consideramos que la burbuja no es insonada, es decir, $A=0$, por lo que no hay fuerza de Bjerknes y la burbuja deberá seguir de forma casi perfecta (salvo por efectos de su densidad) las líneas de corriente del campo fluido.

Lo comprobamos partiendo de cada uno de los cuatro cuadrantes.

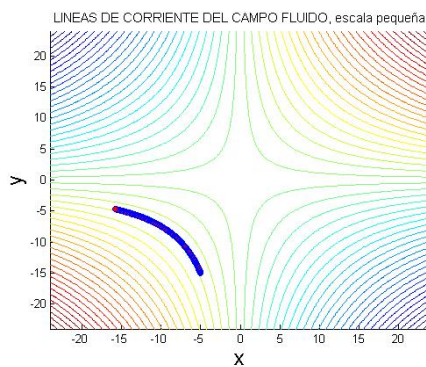
Posición inicial (5,-15):



(5,15):



(-5,-15):



(-5,15):

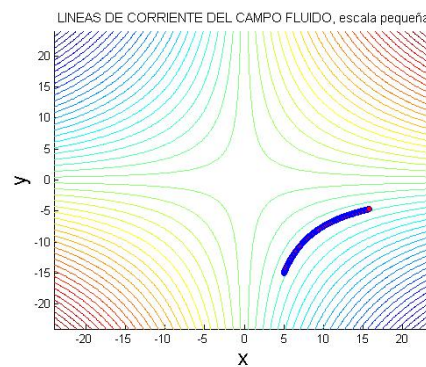


Figura 4.4 Burbuja en ausencia de insonación

4.3 VALIDACIÓN DEL PROBLEMA PROMEDIADO PARA TIEMPOS LARGOS

En esta segunda parte trataremos de validar nuestro análisis utilizando los promedios temporales de dos formas distintas a través del código “bjerckflowpromedio”.

Tomaremos como datos de partida en ambos casos los siguientes:

$$R_0 = 10\mu m$$

$$A = 10^3 Pa$$

$$f = f_{resonance}$$

$$m = 5 \cdot 10^3 s^{-1}$$

$$\tau = 5 \cdot 10^3$$

$$t = \tau \cdot 10$$

Es decir, asumimos que la burbuja será insonada a su frecuencia de resonancia, siendo calculada ésta de forma teórica, y tomaremos como tiempo largo un tiempo adimensional que será diez veces mayor al tiempo corto.

Las formas que proponemos para resolver el problema son éstas:

1. El problema completo a resolver está dado por las ecuaciones (1), (2), (3) y (4) proyectadas sobre los ejes coordenados, teniendo en cuenta para ello que escogemos como dirección y sentido de la insonación los del vector unitario $\vec{n} = -\vec{e}_y$

Este problema se resuelve para tiempos cortos (del orden del tiempo correspondiente a varias oscilaciones de la burbuja) y sin campo externo, obteniéndose un vector de soluciones \vec{y}_1 correspondiente al vector de tiempos \vec{t}_1 :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{y}_1 = [a; \dot{a}; \tilde{u}'_x; \tilde{u}'_y; \tilde{v}_x; \tilde{v}_y; \tilde{x}; \tilde{y}] \\ \vec{t}_1 \end{array} \right\}$$

A continuación se procede a promediar en el tiempo estas soluciones, para lo cual se utilizan los valores de la segunda mitad del vector tiempo con el fin de asegurarnos haber alcanzado la solución estacionaria. De esta forma hemos logrado obtener un único valor promedio asociado a la escala temporal pequeña.

El siguiente paso consiste en introducir esos valores promediados como variables del problema para tiempos largos:

nuestro sistema de ecuaciones está dado ahora por las expresiones promediadas (5), (6), (7) y (8), en las que introducimos la presencia de un campo externo, que sigue siendo el contraflujo. Las condiciones iniciales para la partícula serán su posición inicial y la velocidad del campo correspondiente a esta posición.

Integramos el problema para tiempos largos (del orden de 10 veces el tiempo corto) y obtenemos un vector de soluciones \vec{y}_2 correspondiente al vector de tiempos \vec{t}_2 que no presentará oscilaciones, ya que las variables de entrada eran valores medios.

Para una posición inicial de (5,1), el vector de soluciones \vec{y}_2 nos ofrece la evolución de la burbuja que puede verse en la imagen:

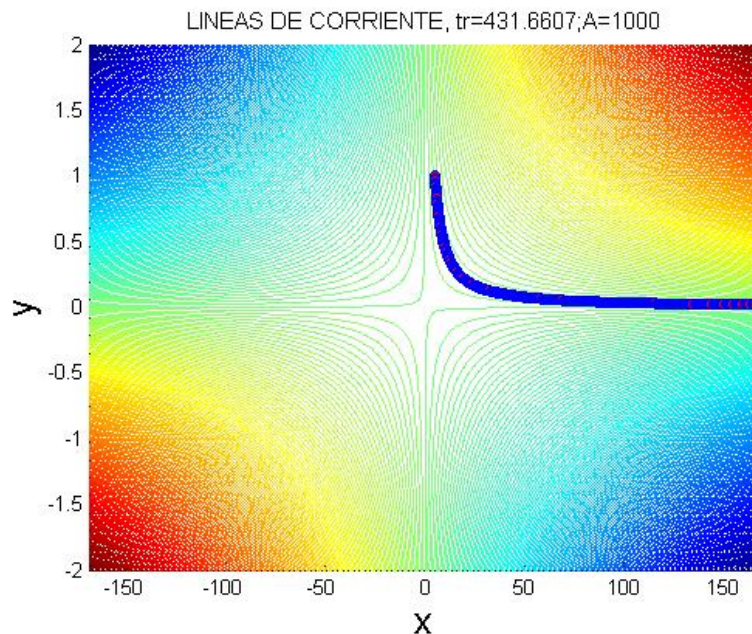


Figura 4.6 Evolución de la posición de la burbuja

2. Resolvemos el problema completo sin promediar con flujo externo integrándolo para tiempos largos, obteniendo el vector solución \vec{y}_3 asociado a los tiempos \vec{t}_3 .
Esta solución presentará oscilaciones ya que las variables no han sido promediadas en ningún momento.

En este caso, para la misma posición inicial, la burbuja se mueve de la misma manera. Lo comprobaremos representando las soluciones \vec{y}_2 e \vec{y}_3 para una partícula que parte de la posición (5,1) en las siguientes gráficas:

- Velocidad alcanzada por la burbuja

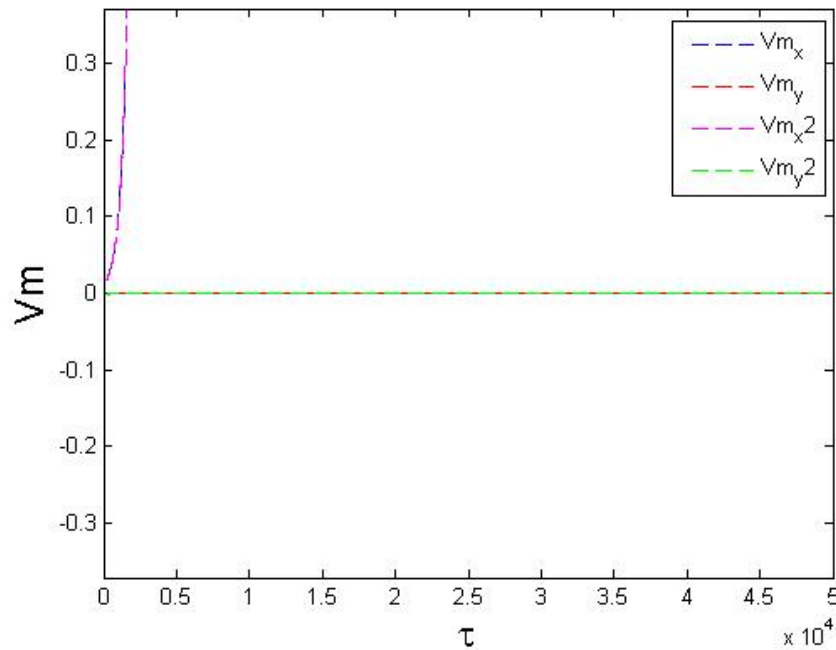


Figura 4.6 Velocidad media total de la burbuja

Para ambas formas de resolución los resultados coinciden. En la gráfica vemos que la velocidad en la coordenada “y” permanece constante y que la velocidad en “x” es positiva y creciente. Si comprobamos la evolución de la burbuja en el campo que aparece en las figuras anteriores, vemos que ésta enseguida pasa a seguir las líneas de corriente del campo, que terminan siendo asíntotas horizontales que avanzan en x; por ello su velocidad en la coordenada horizontal va creciendo y haciéndose cada vez más positiva mientras que en la coordenada vertical la velocidad es constante y viene dada por el efecto del campo acústico.

- Velocidad debida a la fuerza de Bjerknes

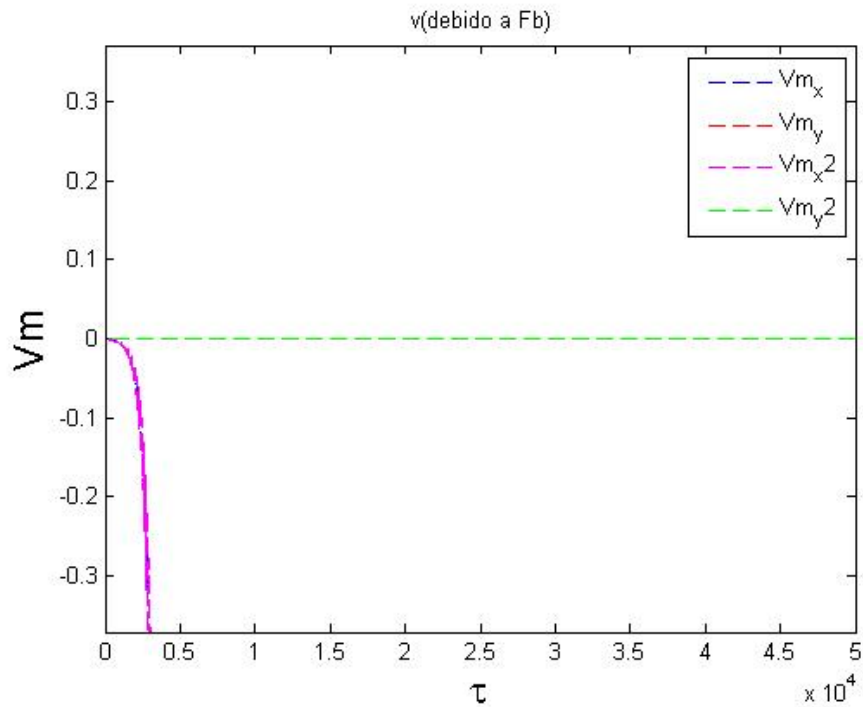


Figura 4.6 Velocidad debida a la insonación acústica

En esta gráfica estamos representando la velocidad adimensional de la burbuja debida exclusivamente al efecto del campo acústico al que está sometida, ya que le hemos restado la componente introducida por el campo fluido externo.

Vemos que la componente “y” de la velocidad tiene un valor pequeño pero constante a tiempos largos y que coincide con el valor de la velocidad vertical total. Tal como explicamos en la gráfica anterior, la burbuja alcanza muy rápido la asíntota horizontal, por lo que en su recorrido mantiene su posición vertical y con ello su velocidad en “y” debida al campo. La componente remanente en esta coordenada se debe enteramente a la contribución de la fuerza de Bjerknes.

Sin embargo la velocidad en la componente “x” se hace negativa. Esto quiere decir que la burbuja “vuelve” hacia su posición inicial. Puede deberse a que la integración del problema se produce para tiempos superiores al de residencia ($t_r \sim 500$, $t_{integración} \sim 50000$) de la burbuja en el campo, lo que es coherente con el término exponencial que aparece al integrar las ecuaciones.

- Coordenadas de la burbuja

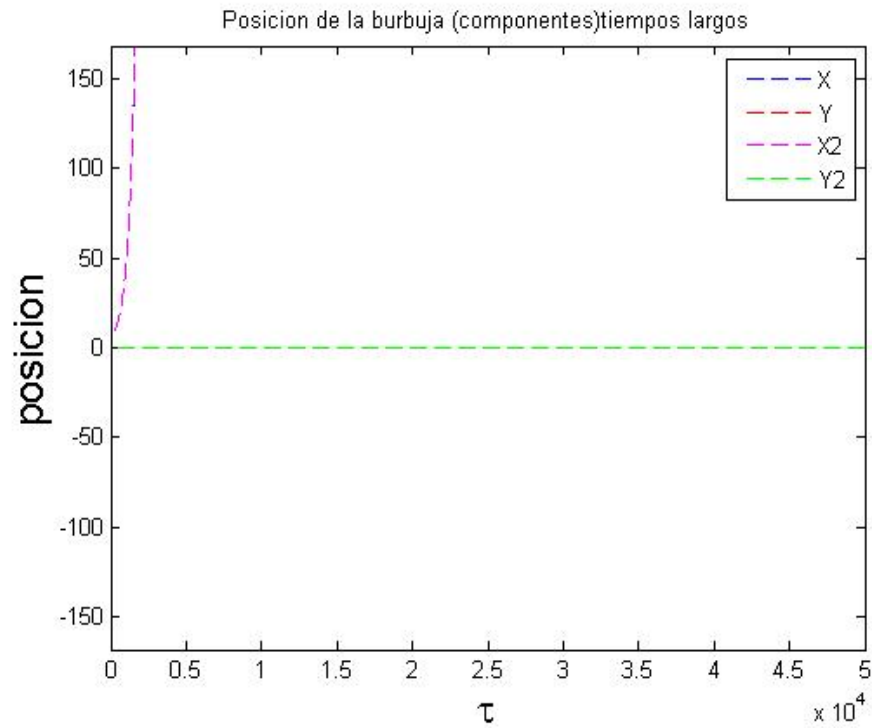


Figura 4.7 Posición de la burbuja

Al igual que en las figuras anteriores, las soluciones de ambos métodos coinciden y nos muestran lo que esperábamos: la burbuja alcanza la asíntota horizontal avanzando en la coordenada horizontal y manteniendo constante su coordenada vertical.

- Zoom para la coordenada “y” de la burbuja

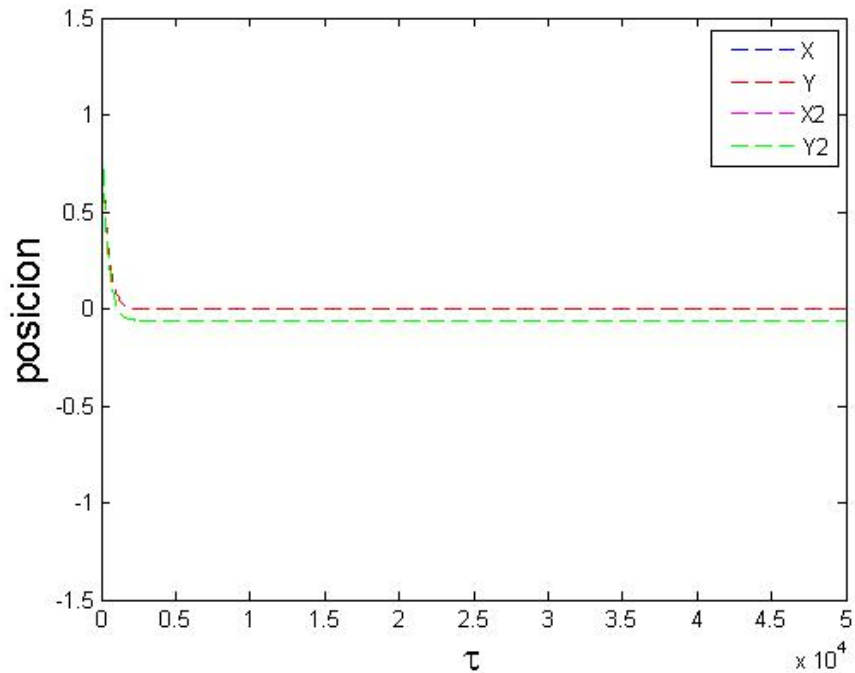


Figura 4.8 Zoom para la coordenada vertical de la posición de la burbuja

Si miramos de cerca las dos soluciones vemos que en el primer caso, en el que se integra la solución promediada en τ para un tiempo largo t , obtenemos un valor para la posición de $y=0$. Sin embargo, la segunda solución, en la que se integra el problema para tiempos largos sin realizar promedios, nos dice que la burbuja se quedaría oscilando entorno a una posición ligeramente negativa.

Ésta última solución se ajusta más con el resultado esperado: si la burbuja no es insonada, esperamos que siga las líneas de corriente del campo y que finalmente alcance la asíntota horizontal correspondiente, que en este caso es $y=0$; pero en el caso de estar sometida a un campo acústico en dirección $\vec{n} = -\vec{e}_y$, actuará sobre la partícula una fuerza adicional conocida como fuerza de Bjerknes que desplazará su posición asintótica en esa misma dirección y sentido.

El error en la solución que utiliza los promedios temporales puede deberse a la simplificación de términos en la obtención de las ecuaciones promediadas, lo cual debe ser estudiado en mayor profundidad.

4.3.1 Cálculo del número de Stokes

El número de Stokes es un número adimensional que caracteriza el comportamiento de las partículas suspendidas en un flujo. Es el resultado del cociente entre el tiempo difusivo y el convectivo.

En este apartado queremos calcular el valor crítico para el número de Stokes que hace que la burbuja atraviese la asíntota horizontal ($y=0$) que divide el campo fluido en dos zonas con información opuesta en la dirección vertical.

En general, si $S \gg 1$, la partícula continúa en línea recta, sin seguir las líneas de corriente del campo, por lo que atraviesa la barrera que representa para nuestro campo fluido el eje x , que separa las zonas del campo con sentido contrario en la dirección y .

Sin embargo, si $S \ll 1$, las partículas siguen las líneas de corriente del fluido y no atraviesan el eje x .

Ecuación general para el equilibrio de fuerzas (sin tener en cuenta la flotabilidad):

$$\rho_b V_b \frac{d\vec{v}}{dt} = -V_b \nabla p - 6\pi\mu R(\vec{v} - \vec{u}) + \frac{1}{2} \frac{d(\rho_l V_b(\vec{u} - \vec{v}))}{dt}$$

Desarrollaremos el equilibrio de fuerzas en la dirección 'y' para identificar el número de Stokes y establecer el valor crítico que en nuestro problema determinará el paso de las burbujas a través del eje 'x'.

Para simplificar el cálculo primero consideraremos el caso en el que la burbuja es indeformable ($V_b = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6} \equiv cte$) y en el que no hay insonación acústica (sin fuerza de Bjerkness). Como nuestro campo fluido es estacionario, desaparecerá también el término de variación temporal de la velocidad del líquido.

$$\begin{aligned} \rho_b \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_y}{dt} &= 6\pi \frac{D}{2} \mu (-my - V_y) - \frac{1}{2} \rho \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_y}{dt} \\ \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \frac{dV_y}{dt} &= \frac{18\mu}{D^2} (-my - V_y) \end{aligned}$$

Adimensionalizamos a partir de los valores iniciales del flujo:

$$\begin{aligned} V &= \frac{V_y}{my_0} & \xi &= y/y_0 & \tau &= mt \\ \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) my_0 \frac{dV}{d(\tau/m)} &= \frac{-18\mu}{D^2} my_0 (\xi + V) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \frac{dV}{d\tau} = \frac{-18v}{mD^2} (\xi + V)$$

$$\frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{18v} \frac{dV}{d\tau} = -(\xi + V)$$

Definimos el número de Stokes como:

$$S = \frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{18v}$$

La ecuación diferencial adimensionalizada a resolver es la siguiente:

$$S \frac{dV}{d\tau} = -(\xi + V) \text{ con } V = \frac{d\xi}{d\tau}$$

Imponemos ahora las condiciones iniciales:

$$\tau = 0: \quad \xi = 1, \quad V = -1$$

$$S \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} + \xi = 0$$

$$\xi = C e^{\lambda\tau}$$

$$S\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4S}}{2S} = -\frac{1}{2S} \pm \frac{1}{2S} \sqrt{1 - 4S}$$

De aquí obtenemos que el valor crítico para el número de Stokes, que es de $S_c=1/4$:

- Si $S > 1/4$, obtenemos raíces complejas conjugadas, lo que traducido al plano físico quiere decir que la burbuja atraviesa la barrera del eje x, y al recibir información contraria en los dos cuadrantes (en un cuadrante las líneas de corriente tienen sentido vertical hacia abajo y en el otro tienen sentido vertical hacia arriba), quedará oscilando en torno al eje x.
- Si $S < 1/4$, obtenemos raíces reales, lo que quiere decir que la burbuja no atraviesa la barrera, por mucho tiempo que la dejemos avanzar.

Vamos a plantear ahora el equilibrio de fuerzas en la dirección 'x' para los mismos supuestos: en este caso el eje 'x' no supone una barrera, ya que a ambos lados las líneas de corriente avanzan con el mismo sentido en la dirección horizontal, por lo que no debe existir límite en el número de Stokes en esta dirección.

$$\rho_b \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_x}{dt} = 6\pi \frac{D}{2} \mu (mx - V_x) - \frac{1}{2} \rho \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_x}{dt}$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \frac{dV_x}{dt} = \frac{18\mu}{D^2 \rho} (mx - V_x)$$

Adimensionalizamos a partir de los valores iniciales del flujo:

$$V = \frac{V_x}{mx_0} \quad \eta = x/x_0 \quad \tau = mt$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2} \right) mx \frac{dV}{d(\tau/m)} = \frac{18\mu}{D^2 \rho} mx_0 (\eta - V)$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2} \right) \frac{dV}{d\tau} = \frac{18v}{mD^2} (\eta - V)$$

$$\frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2} \right) dV}{18v} = (\eta - V)$$

Definimos el número de Stokes como:

$$S = \frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2} \right)}{18v}$$

La ecuación diferencial adimensionalizada a resolver es la siguiente:

$$S \frac{dV}{d\tau} = (\eta - V) \text{ con } V = \frac{d\eta}{d\tau}$$

Imponemos las condiciones iniciales:

$$\tau = 0: \quad \eta = 1, \quad V = 1$$

$$S \frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \frac{d\eta}{d\tau} - \eta = 0$$

$$\eta = Ce^{\lambda\tau}$$

$$S\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4S}}{2S} = -\frac{1}{2S} \pm \frac{1}{2S} \sqrt{1 + 4S}$$

En este caso el número de Stokes es una cantidad positiva, por lo que el discriminante no se hace nunca negativo y las raíces de la ecuación son siempre positivas. Esto se traduce en que la burbuja nunca se quedará oscilando en torno a la dirección 'x' porque la información que le llega de ambos lados es la misma.

Realizaremos a continuación el cálculo del límite del Stokes para burbuja rígida sometida a una insonación acústica. Planteamos el equilibrio de fuerzas en la dirección 'y':

$$\rho_b \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi D^3}{6} \frac{dP_l}{dy} + 6\pi \frac{D}{2} \mu (-my - V_y) - \frac{1}{2} \rho \frac{\pi D^3}{6} \frac{dV_y}{dt}$$

Donde $\vec{F}_B = -V_b \nabla p \Rightarrow F_{By} = -\frac{\pi D^3}{6} \frac{dP}{dy}$, $P = P_0 + P_a \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) \sin(\omega t)$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \frac{dV_y}{dt} = \frac{18\mu}{D^2} (-my - V_y) - \frac{1}{\rho} \frac{dP_l}{dy}$$

Adimensionalizamos:

$$V = \frac{V_y}{my_0} \quad \xi = y/y_0 \quad \tau = mt \quad p = \frac{P}{(\rho y_0^2 m^2)}$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) my_0 \frac{dV}{d(\tau/m)} = \frac{-18\mu}{D^2} my_0 (\xi + V) - \frac{1}{\rho} \frac{d(P \rho y_0^2 m^2)}{d(\xi y_0)}$$

$$\left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) \frac{dV}{d\tau} = \frac{-18v}{mD^2} (\xi + V) - \frac{dP}{d\xi}$$

$$\frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right) dV}{18v d\tau} = -(\xi + V) - \frac{mD^2}{18v} \frac{dP}{d\xi}$$

Definimos los siguientes parámetros:

$$S = \frac{mD^2 \left(\frac{\rho_b}{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{18v}$$

$$\widetilde{F}_B = \frac{mD^2}{18v} \frac{dP}{d\xi}$$

Con lo que la ecuación queda así:

$$S \frac{dV}{d\tau} = -(\xi + V) - \widetilde{F}_B, \text{ con } V = \frac{d\xi}{d\tau}$$

$$S \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \frac{d\xi}{d\tau} + \xi + \widetilde{F}_B = 0$$

$$\epsilon = \xi + \widetilde{F}_B$$

$$S \frac{d^2\epsilon}{d\tau^2} + \frac{d\epsilon}{d\tau} + \epsilon = 0$$

$$\epsilon = A e^{-S \cdot t} e^{\sqrt{1-4S} \cdot t} + B e^{-S \cdot t} e^{-\sqrt{1-4S} \cdot t}$$

Vemos que para $t \rightarrow \infty$ las dos exponenciales se anulan, con lo que nos queda:

$$\epsilon(t \rightarrow \infty) = 0 \Rightarrow \xi = -\widetilde{F}_B$$

Es decir, que cuando tenemos insonación acústica la burbuja no se quedará oscilando en torno al eje x, sino que lo hace desplazada una distancia hacia abajo equivalente al módulo de la fuerza de Bjerknes. Esto es coherente con los resultados obtenidos para la coordenada vertical de la burbuja en el apartado anterior.

A continuación plantearemos algunos casos concretos en los que podamos comprobar si la burbuja pasa o no la asíntota del eje “x” en función del número de Stokes asociado.

Para ello hay que tener en cuenta que el valor de $S=1/4$ es simplemente un valor orientativo en nuestro problema, ya que marca el límite en el que la burbuja atraviesa o no la barrera cuando no tenemos insonación acústica. En nuestro caso sí que tenemos fuerza de Bjerknes, por lo que este valor de S sólo nos sirve como referencia.

Por otro lado, sabemos que cuanto más intenso sea el campo externo, es decir, a mayor valor de “m”, mayor será el número de Stokes y habrá mayor probabilidad de que la burbuja atraviese la barrera.

CASO A: La burbuja no atraviesa el eje X

Vamos a analizar el comportamiento de una burbuja que parte de la posición (5,1).

Las condiciones del ejemplo son las siguientes:

$$R_0 = 10\mu m$$

$$A = 10^3 Pa$$

$$f = f_r$$

$$m = 5 \cdot 10^3 s^{-1}$$

$$\tau = 5000$$

$$t = 10\tau$$

El número de Stokes resultante tiene un valor de $S=0.0557 \ll 1$, por lo que la burbuja no atravesará la barrera y seguirá las líneas de corriente del campo.

Vemos la evolución de la partícula desde su posición inicial hasta su posición asintótica en las siguientes gráficas:

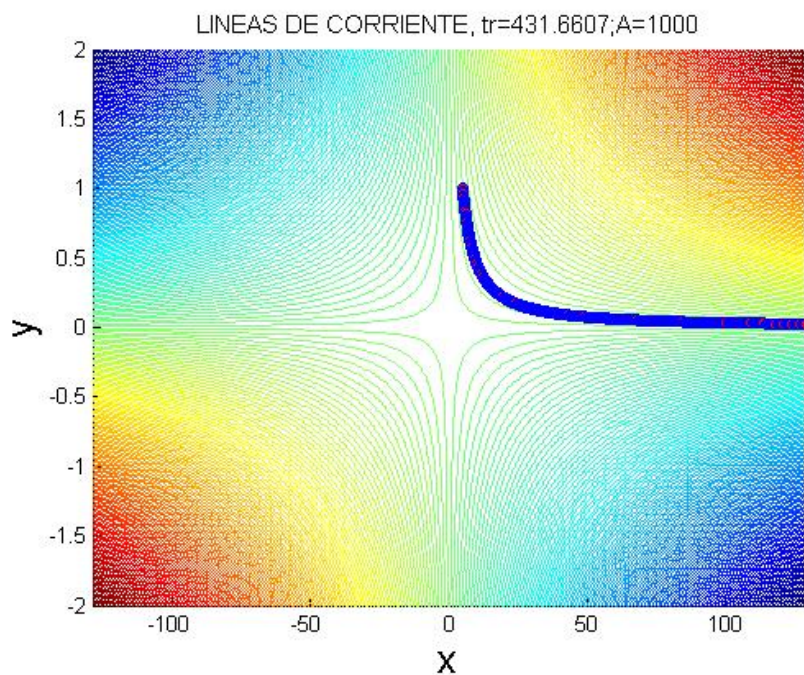


Figura 4.9 Burbuja con $S=0.056$

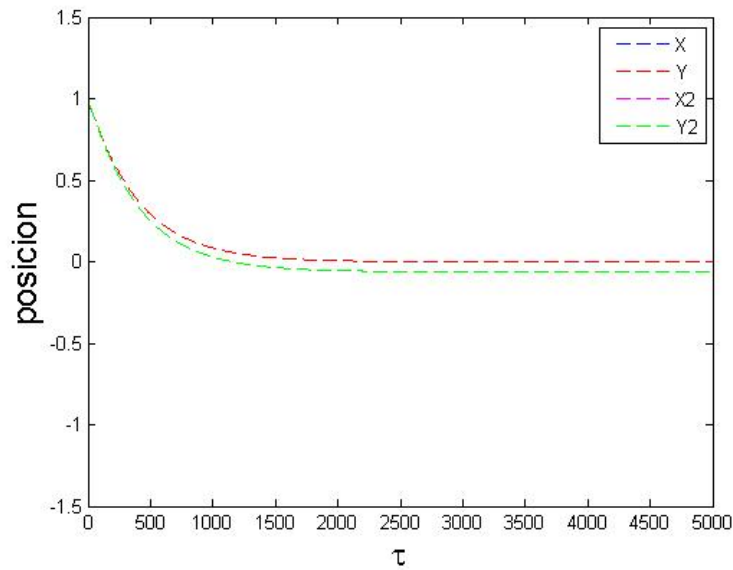


Figura 4.10 Evolución de la posición vertical, caso S=0.056

Tal y como vimos en el apartado anterior, si resolvemos el problema mediante promedios, obtenemos que la partícula alcanza la misma posición asintótica a la que llegaría en caso de no ser insonada. Sin embargo, si no utilizamos los promedios temporales obtenemos la respuesta esperada, es decir, que la fuerza de Bjerknes que actúa sobre la partícula la desplaza a una posición asintótica que se encuentra por debajo de la determinada por el campo, de acuerdo con la dirección y sentido de avance de la onda acústica.

CASO B: La burbuja atraviesa el eje X

Las condiciones de partida para este ejemplo son las mismas que las del caso anterior a excepción del valor de la intensidad del campo: para conseguir que la burbuja atravesase la asíntota del eje X hemos de aumentar su número de Stokes; ya que este es directamente proporcional a la intensidad del campo externo, la aumentaremos en un orden de magnitud:

$$m = 5 \cdot 10^4 s^{-1}$$

El número de Stokes para la burbuja pasa a ser de $S=0.5567$, un orden de magnitud superior, haciendo que la burbuja atravesase el eje horizontal:

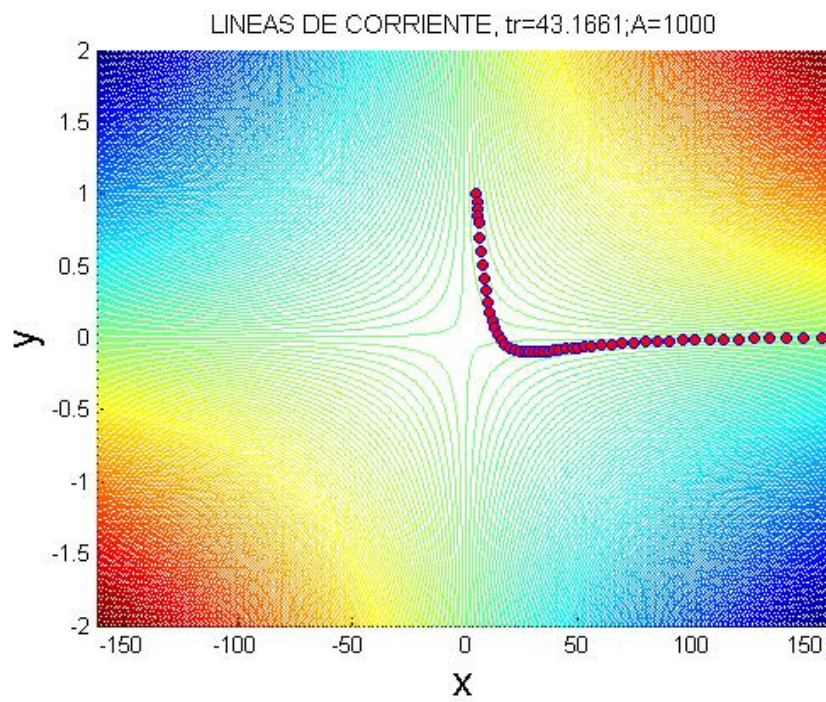


Figura 4.11 Burbuja con $S=0.56$

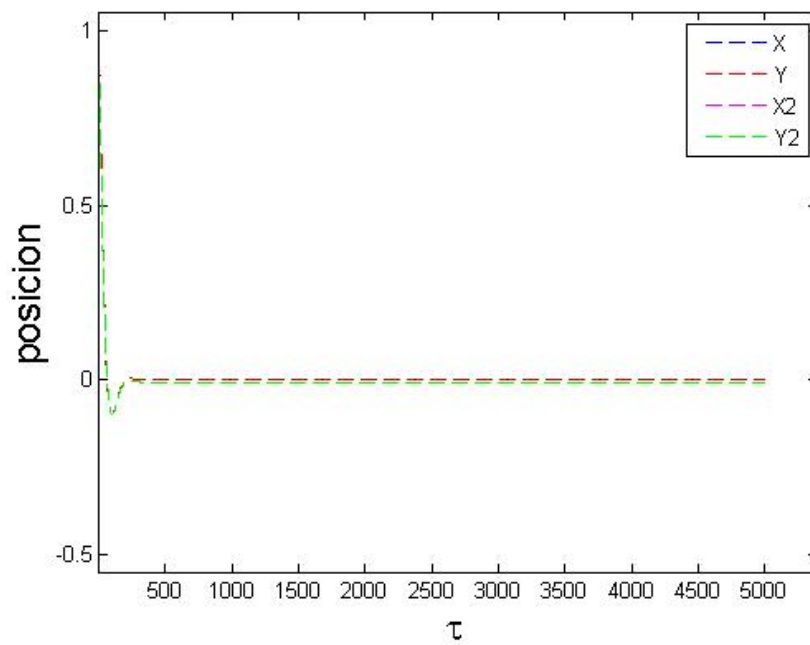


Figura 4.12 Evolución de la posición vertical, caso $S=0.56$

Como puede apreciarse en ambas gráficas, la burbuja atraviesa el eje X , entrando en el cuarto cuadrante y al hacerlo, comienza a seguir las líneas de corriente del mismo, que le llevan de nuevo al eje X. El eje horizontal separa dos cuadrantes del flujo que obligan a la burbuja a seguir sentidos contrarios en dirección vertical. Por ello, la burbuja se quedará oscilando entorno a su posición de equilibrio, que es $y=0$ cuando no hay campo acústico, pero que en nuestro caso será una posición vertical ligeramente negativa por efecto de la fuerza de Bjerknes.

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS EXPERIMENTAL

En este último capítulo trataremos de validar el estudio teórico realizado a lo largo de la memoria mediante un análisis experimental del problema.

5.1 ENSAYOS EXPERIMENTALES

En nuestros ensayos tratamos de simular las condiciones del problema estudiado de forma teórica.

Las instalaciones y equipos empleados son:

- Se emplea una pecera de cristal de dimensiones suficientes para evitar que las ondas sonoras reflejen en el cristal y perturben los resultados del ensayo.
- La pecera se llena con agua desionizada para que no disuelva el aire. A este agua se le añade un poco de lejía para mantenerla limpia y con el objetivo de volverla conductora, ya que es necesario para poder generar las burbujas por electrolisis.
- Las burbujas son generadas por electrolisis utilizando un par de electrodos que se sumergen en la disolución y los cuales se conectan a una fuente de alimentación continua. Es necesario que el agua empleada sea conductora. Por ello añadimos lejía al agua desionizada.
- El electrodo en el que se generan las burbujas de hidrógeno se sitúa en el fondo de la pecera y dispuesto en dirección vertical, de modo que al generarse, las burbujas ascienden hacia el exterior en línea recta por flotabilidad.
- La onda acústica se obtiene a través de un transductor de 0.5 MHz que se conecta a un generador de pulsos. Conseguimos una señal sinusoidal de frecuencia y duración conocidas cuya amplitud puede ser modificada a través del generador pero de la cual desconocemos su valor absoluto. Por tanto, la amplitud de la onda será un parámetro libre en nuestro problema.
- Con el objetivo de grabar el comportamiento de las burbujas en su ascenso a través del líquido y en su movimiento debido a la insonación, se utiliza una cámara de alta velocidad con un objetivo microscópico, capaz de detectar con nitidez burbujas de hasta $5\text{-}10\mu\text{m}$ de diámetro.
- Se emplea un foco frío de luz continua de alta intensidad para iluminar el recorrido de las burbujas y que así pueda ser captado con claridad por la cámara. La ventaja de este equipo es que genera una elevada intensidad luminosa sin producir calor, por lo que no altera las condiciones del experimento.

A pesar de que se trata de reproducir las condiciones teóricas lo más fielmente posible, no se puede conseguir al cien por cien ya que el montaje y los equipos utilizados introducen cierta incertidumbre en los resultados:

- Tanto el transductor como el electrodo se encuentran en el interior de la pecera. Un cambio de posición de los mismos para obtener una nueva sesión supone mover el fluido; si no se espera el tiempo suficiente a que las corrientes generadas en su interior se disipen, el líquido presentará una velocidad de arrastre que hará que las burbujas asciendan con una velocidad superior a la que presentan por flotabilidad.
- La propia generación de burbujas en el electrodo puede conferirles una cierta velocidad de salida que será captada en caso de que se grabe el movimiento de las burbujas justo tras ser generadas. Sin embargo, si nos alejamos del electrodo este efecto desaparece, pues la poca inercia de las burbujas hace que enseguida pierdan esa velocidad de partida.
- Una de las hipótesis de partida en nuestro estudio teórico consiste en asumir que disponemos de una población de burbujas de tamaño uniforme; sin embargo, no podemos controlar el tamaño de las burbujas generadas. El único parámetro que podemos controlar en su generación es el voltaje de la alimentación de los electrodos, que permite proporcionar una mayor o menor concentración de burbujas en función de si lo aumentamos o lo bajamos respectivamente. Aunque aumentemos el voltaje de la alimentación eléctrica, en ningún caso la concentración de burbujas generada será tal que haya que tener en cuenta su radiación acústica.
- Tener burbujas aisladas serían las condiciones ideales para nuestro estudio ya que podríamos ver cómo se comporta la burbuja exclusivamente por efecto de la fuerza primaria de Bjerknes. Sin embargo, las burbujas se generan por electrolisis en elevadas concentraciones, por lo que se encuentran muy cerca las unas de las otras y entra en juego la fuerza secundaria de Bjerknes, que ante un pulso acústico tiende a acercar las burbujas entre sí o a repelerlas. Un factor fundamental en la fuerza secundaria es la masa de la partícula. Los llamados “cluster” o aglomeración de burbujas actúan como poderosos imanes y afectan al movimiento de todas las partículas a su alrededor, distorsionando así totalmente el campo. Como se puede comprender, esto incrementa enormemente la dificultad de obtener sesiones válidas.
- La cámara con la que se graban las trayectorias de las partículas es soportada por un trípode que se coloca sobre el suelo. El mero hecho de pisar cerca de la cámara puede alterar la grabación, al igual que puede generar movimiento en el agua de la pecera, creándose corrientes que pueden afectar a la velocidad de la burbuja.

Una vez analizados todos los factores que pueden introducir error en las medidas, nos disponemos a desarrollar el planteamiento teórico con el que compararemos las medidas experimentales.

5.2 PLANTEAMIENTO TEÓRICO DEL PROBLEMA

Las ecuaciones que nos permitirán obtener la evolución teórica de las variables del líquido y de la burbuja teniendo en cuenta las condiciones de los ensayos son las que se presentan a continuación. Tomaremos como eje horizontal de referencia el de ascenso de las burbujas al exterior por flotabilidad y como eje vertical el perpendicular a éste. Adoptamos estos ejes coordenados con el fin de que coincidan con las imágenes grabadas. Por tanto, y según la disposición del transductor en los ensayos, las ondas acústicas tendrán una dirección y sentido dados por el vector unitario $\vec{n} = -\vec{e}_y$. Proyectaremos las ecuaciones sobre los ejes elegidos.

Las novedades que introduciremos respecto a las ecuaciones empleadas en los desarrollos teóricos anteriores son estas:

- En el equilibrio de fuerzas sobre la burbuja es fundamental que no despreciemos la flotabilidad, puesto que su compensación con la fuerza viscosa nos permitirá calcular la velocidad a la que ascienden las burbujas en ausencia de ultrasonido.
- La presión de insonación será caracterizada por una onda sinusoidal creciente en amplitud durante los primeros ciclos ya que eso es precisamente lo que ocurre con el generador de pulsos del laboratorio. La señal del ultrasonido vendrá dada por:

$$p_{driv}(t) = A \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega t) \cdot \left(1 - \exp\left(\frac{\vec{k}\vec{x} - \omega t}{t_0}\right) \right)$$

siendo t_0 el tiempo correspondiente a los primeros ciclos de crecimiento de la onda. Consideraremos que la onda crece para los primeros diez ciclos.

- Ecuación para las oscilaciones radiales

$$\begin{aligned} \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 \right) = & \left(\Pi_0 + \frac{1}{We} + \frac{1}{We_{sh}} \right) a^{-3\gamma} (1 - 3\gamma M\dot{a}) - \frac{1}{Re_\omega} \left(\frac{\dot{a}}{a} + M \left(\ddot{a} - \frac{\dot{a}^2}{a} \right) \right) + \\ & - \frac{1}{We} \frac{(1 - M\dot{a})}{a} - \frac{1}{We_{sh}} a^{-3} (1 - 3M\dot{a}) - \frac{\delta}{Re_{sh}} \frac{\dot{a}}{a(a - \delta)} + \\ & - (\Pi_0 + \varepsilon \sin(-M\tilde{y} - \tau) (1 - \exp(-M\tilde{y} - \tau)/t_0)) \quad (1) \end{aligned}$$

- Ecuación para la velocidad del líquido

Proyección sobre el eje X:

$$\frac{d\tilde{u}_x}{d\tau} = 0 \quad (2)$$

Proyección sobre el eje Y:

$$\frac{d\tilde{u}_y}{d\tau} = \varepsilon M \cdot \left[\begin{array}{l} \cos(-My - \tau) \cdot (1 - \exp(-My - \tau)/t_0) \\ -\frac{1}{t_0} \sin(-My - \tau) \cdot \exp(-My - \tau)/t_0 \end{array} \right] \quad (3)$$

- Ecuación para la velocidad de la burbuja

Tal y como explicamos antes, en esta parte del estudio debemos mantener el término de flotabilidad, cuya expresión adimensional fue desarrollada en el capítulo 2.

Proyección sobre el eje X:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} a^3 \right) \frac{d\tilde{v}_x}{d\tau} = \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\tilde{u}_x - \tilde{v}_x) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a (\tilde{u}_x - \tilde{v}_x) + \frac{\rho_l - \rho_b}{4\rho_l} a^3 \frac{G}{Re_\omega} \quad (4)$$

Proyección sobre el eje Y:

$$\left(\frac{\rho_{b0}}{\rho} + \frac{1}{2} a^3 \right) \frac{d\tilde{v}_y}{d\tau} = \frac{3}{2} \dot{a} a^2 (\tilde{u}_y - \tilde{v}_y) + \frac{9}{8} \frac{1}{Re_\omega} a (\tilde{u}_y - \tilde{v}_y) + \frac{3}{2} a^3 \frac{d\tilde{u}_y}{d\tau} \quad (5)$$

- Ecuación para la posición de la burbuja

$$\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \vec{v} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{d\tau} = \tilde{v}_x \quad (6) \\ \frac{dy}{d\tau} = \tilde{v}_y \quad (7) \end{array} \right\}$$

5.2.1 Burbujas insonadas a la frecuencia de resonancia

En este apartado resolveremos las ecuaciones que acabamos de plantear para el caso de una burbuja insonada a su frecuencia de resonancia. El motivo de plantear este ejemplo es que si la onda acústica presenta una frecuencia igual a la propia de la burbuja, garantizamos que la amplitud de sus oscilaciones radiales será máxima y por tanto también lo será el efecto de la fuerza de Bjerknes sobre ella; de esta forma podremos comprobar claramente el comportamiento que provoca en las burbujas la presencia de un ultrasonido.

Proponemos por ejemplo el caso de una burbuja de $30\mu m$ de tamaño insonada con una onda de $A = 10^3 Pa$ de amplitud.

El sistema es integrado durante un tiempo adimensional de $t=10.000$, lo que se corresponde con $10.000/2\pi$ ciclos y con un tiempo de $t_d=t/\omega=15ms$ que es suficiente para que se alcance el régimen estacionario.

Analizaremos una a una la evolución de las distintas variables.

OSCILACIÓN RADIAL

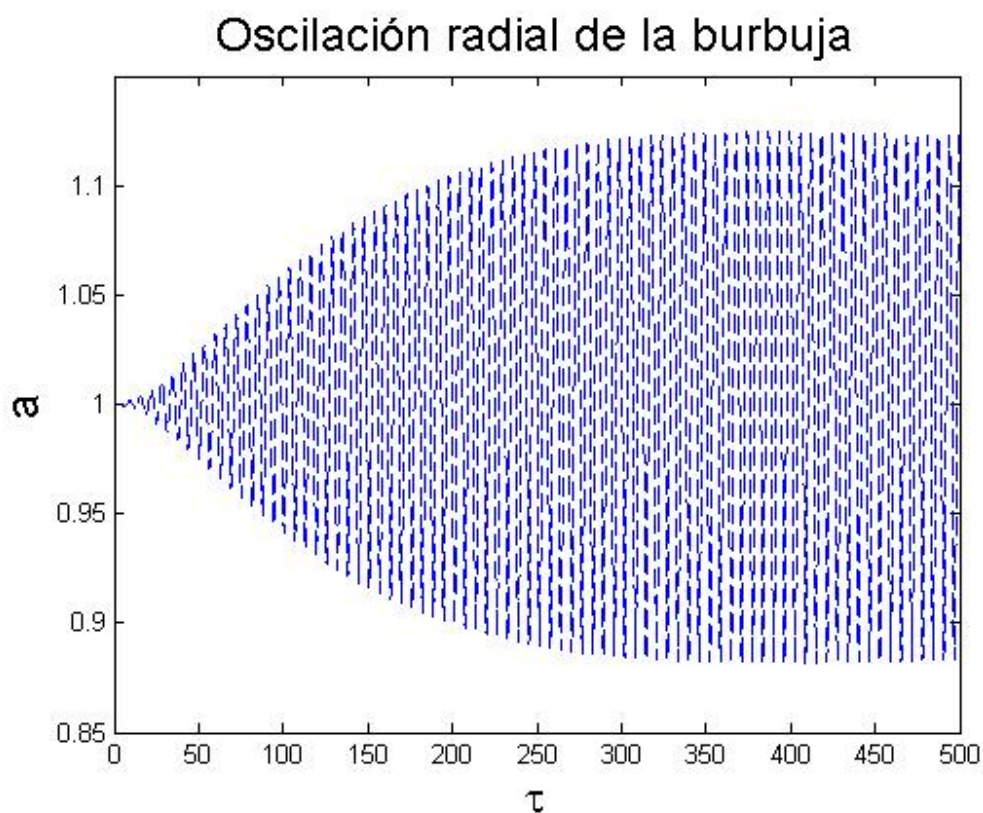


Figura 5.1 Oscilaciones radiales de la burbuja

En este caso representamos el radio adimensional de la burbuja $a = R/R_0$. Como vemos, la burbuja se expande y se contrae en cada ciclo, oscilando entorno a su tamaño original. Ya que la media del radio es constante con el tiempo, no nos aportará información el hecho de representar esta variable frente al tiempo en segundos.

La gráfica nos ofrece una información relevante: en sus oscilaciones la burbuja varía su radio hasta en un 10% con respecto a su tamaño original. Esta amplitud de las oscilaciones es elevada, lo que nos indica que el efecto del ultrasonido en el movimiento del líquido y de la partícula será considerable.

VELOCIDAD DEL LÍQUIDO

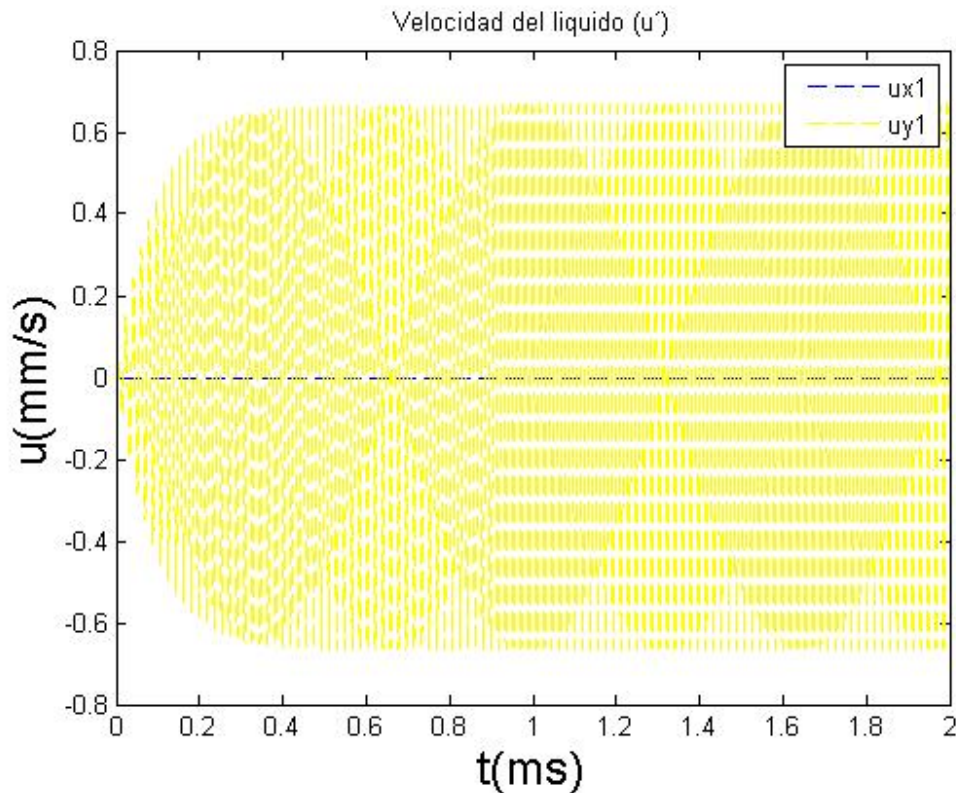


Figura 5.2 Evolución de la velocidad del líquido

Según las condiciones de nuestro problema, el líquido que rodea a la burbuja se encuentra en reposo salvo por la presencia del ultrasonido. Por ello, como vimos en el estudio mediante escalas temporales múltiples, podemos descomponer la velocidad del líquido en una componente media, que será constante en el tiempo, y una fluctuación debida a la presencia del campo acústico:

$$\tilde{u} = \widetilde{u_0} + u'$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{u}_0}{d\tau} = 0 \\ \frac{du'}{d\tau} = -\nabla\tilde{p} \end{array} \right\}$$

La velocidad representada se corresponde con la componente fluctuante. El ultrasonido actúa en la dirección vertical, lo que justifica que la fluctuación en la coordenada “x” sea nula.

VELOCIDAD DE LA BURBUJA

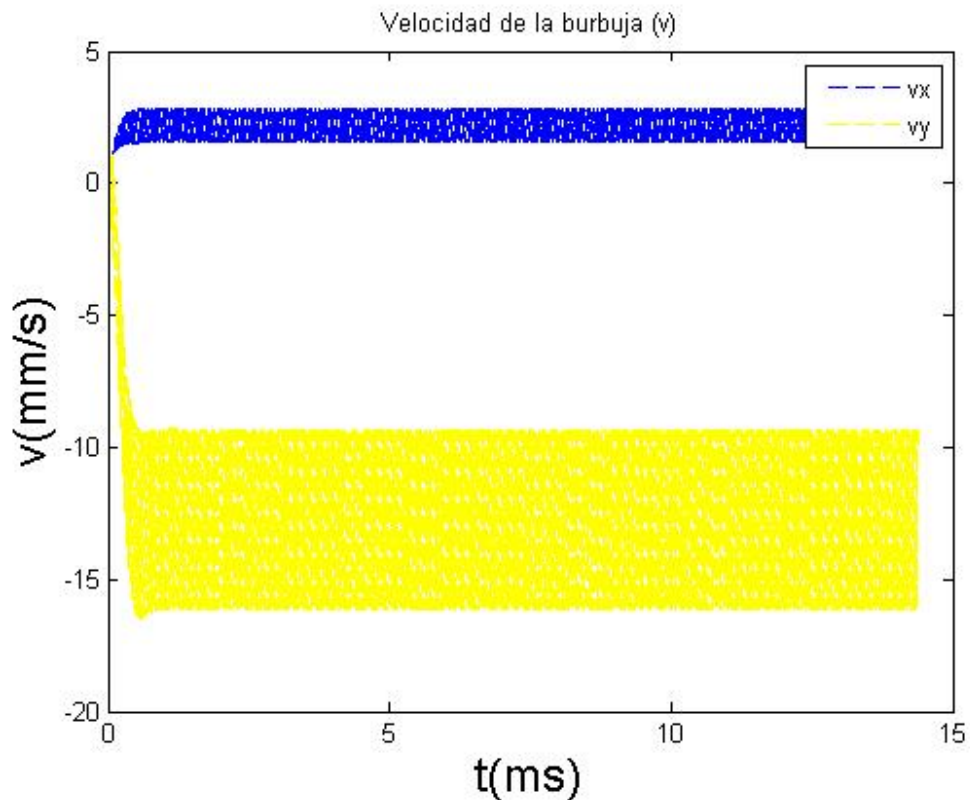


Figura 5.3 Evolución de la velocidad de la burbuja

Debido a los ejes coordenados escogidos, la componente horizontal de la velocidad es la que alcanza la burbuja en su ascensión a través del líquido como consecuencia de la flotabilidad. En cuanto a la componente vertical, esta velocidad es consecuencia del efecto de la fuerza de Bjerknes, que como muestra la figura es negativa, es decir, la burbuja tiende a alejarse del transductor del que parte la onda.

POSICIÓN DE LA BURBUJA

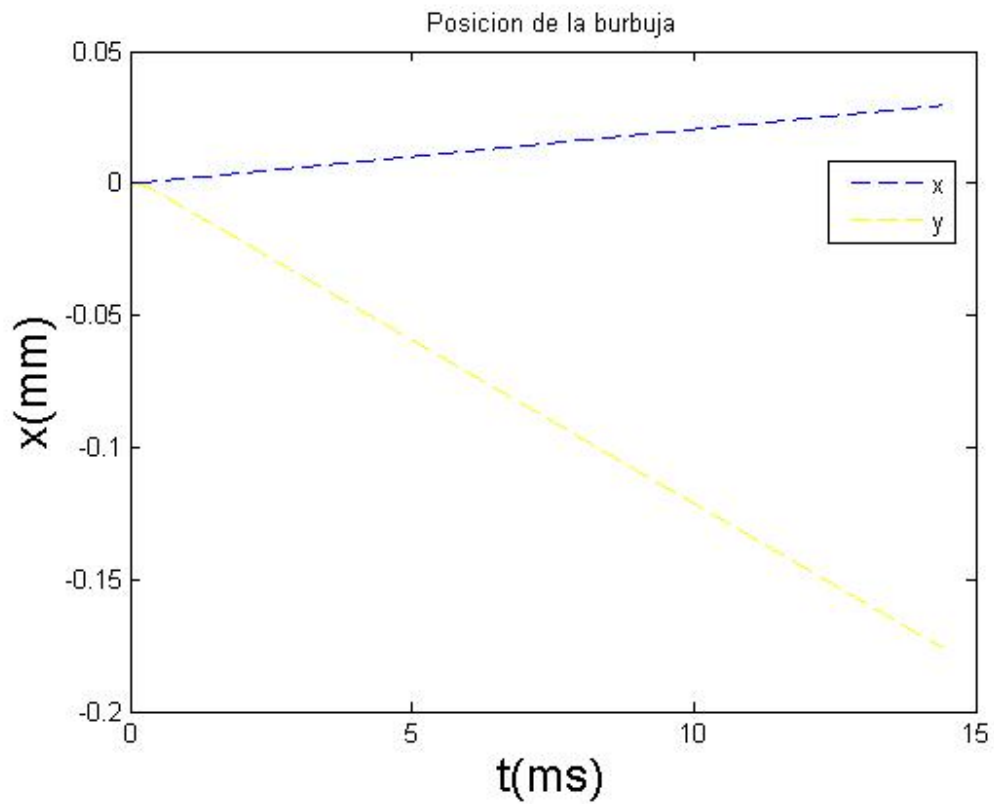


Figura 5.4 Evolución de la velocidad de la burbuja

En concordancia con las velocidades, vemos que la burbuja avanza positivamente a lo largo del eje horizontal, es decir, sube hacia el exterior de la pecera, mientras que desciende por el eje vertical, alejándose del transductor.

5.2.2 Burbujas insonadas con ondas acústicas distintas

En este apartado buscamos comprobar si los resultados de nuestro problema son los mismos tanto si empleamos una señal acústica sinusoidal como si se trata de una señal coseno. De esta forma tratamos de comprobar que el comportamiento de la burbuja es independiente de la condición inicial del ultrasonido.

Al modular nuestro ultrasonido de acuerdo con la señal generada con el equipo del laboratorio, le introducimos a la onda pura un término amortiguador que actúa haciendo que la amplitud de la onda crezca desde cero hasta su valor estacionario durante los primeros ciclos. Este término nos permite usar una señal seno o una señal coseno indistintamente ya que hace que la condición inicial del problema en ambos casos sea la misma:

$$\vec{P}_{driv1}(\vec{x}, t) = A \sin(\vec{k}\vec{x} - t) \cdot (1 - \exp(\vec{k}\vec{x} - t)/t_0) \rightarrow \vec{P}_{driv1}(0,0) = 0$$

$$\vec{P}_{driv2}(\vec{x}, t) = A \cos(\vec{k}\vec{x} - t) \cdot (1 - \exp(\vec{k}\vec{x} - t)/t_0) \rightarrow \vec{P}_{driv2}(0,0) = 0$$

Por tanto, las respuestas obtenidas insonando con ambas señales coinciden salvo por un desfase de $\pi/2$, como cabía esperar.

Como muestra echaremos un vistazo a la evolución de la posición de la burbuja estudiada en el apartado anterior:

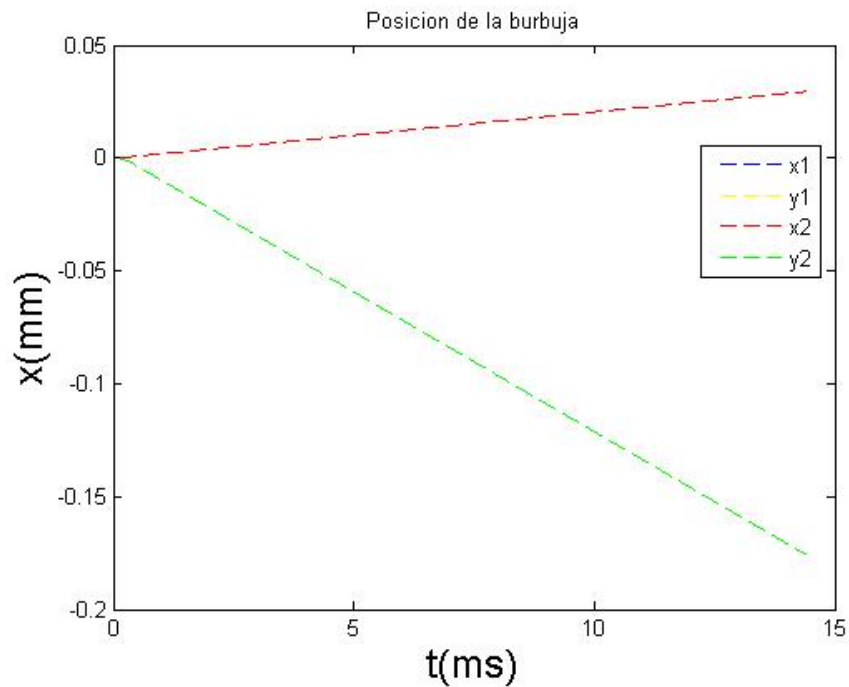


Figura 5.5 Posición para la burbuja insonada con señal seno (1) y coseno (2)

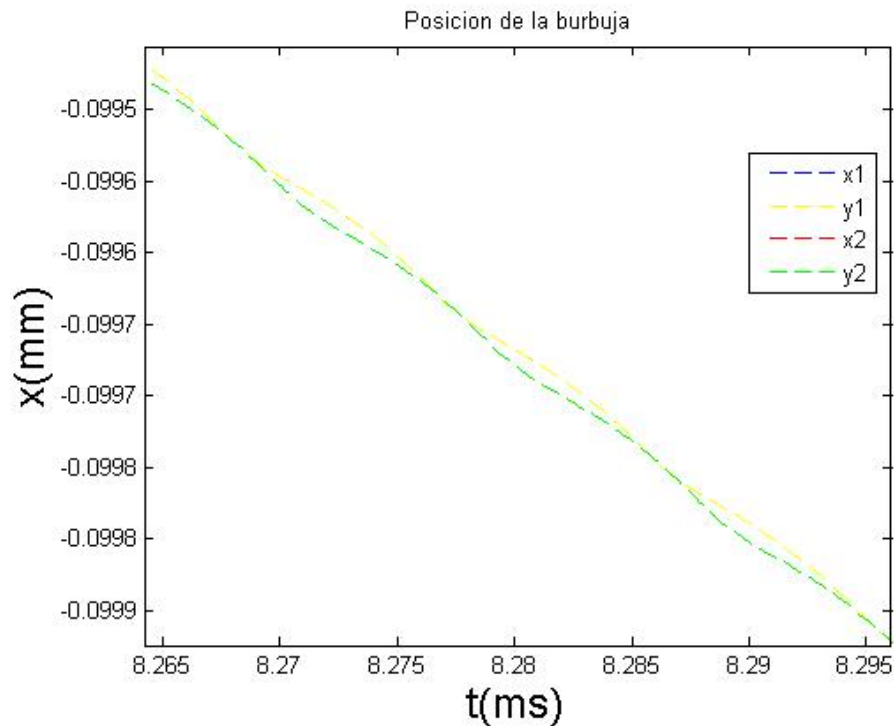


Figura 5.6 Desfase entre las respuestas para una señal seno (1) y coseno (2)

5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES

5.3.1 Calibración

Para poder obtener información real de las imágenes grabadas es necesario calibrarlas. Todas las sesiones de ensayo han sido grabadas con la máxima amplificación de la cámara (el máximo zoom), por lo que la misma calibración es válida para todas ellas.

Se utiliza para ello una aguja de calibración cuyo diámetro es conocido:

$$D_{aguja} = 203\mu m$$

Medimos en la imagen el diámetro de la aguja en pixels y lo comparamos con su valor real; de esta forma obtendremos la escala a aplicar a las burbujas de la imagen para obtener su tamaño real.

$$D'_{aguja} = 84 \text{ pixels}, \quad 1 \text{ pixel} = 200\mu m$$

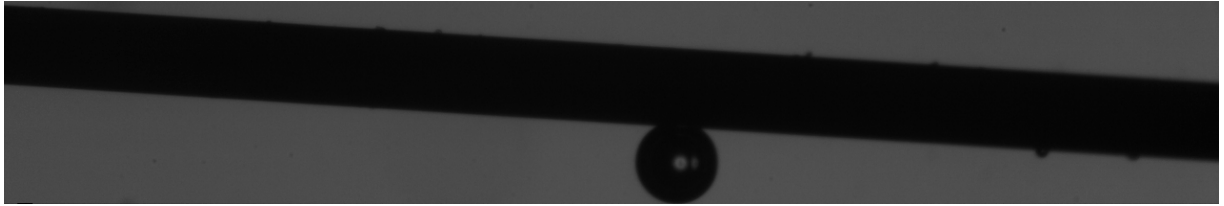


Figura 5.7 Imagen aguja de calibración

$$D_{burb} = D'_{burb} \cdot \frac{D_{aguja}}{D'_{aguja}} = D'_{burb} \cdot \frac{203}{84}$$

$D_{burb}(\mu m) = D'_{burb} \cdot \frac{203}{84}$
--

Consideraremos una sesión experimental que nos sirva de apoyo para explicar los códigos que utilizamos para traducir los vídeos grabados en datos aprovechables.

5.3.2 Código “trajanalysis”

Este programa permite detectar los centroides de las burbujas, es decir, las coordenadas x e y de sus centros, para diferentes instantes de tiempo.

Como ya explicamos, no es posible generar burbujas aisladas por electrolisis, sino que éstas se producen en elevadas concentraciones. Esto implica que las burbujas que nos interese recoger en nuestra sesión estarán rodeadas de otras situadas en otros planos y que por tanto se verán de modo menos nítido, o por partículas cuyo tamaño es del orden del error cometido en la medida.

Para discriminar entre las burbujas que nos interesa analizar y las que no, se utilizan dos umbrales:

- Un valor correspondiente al mínimo nivel de gris que ha de tener la partícula en la imagen. De esta forma eliminamos las sombras pertenecientes a las burbujas que se encuentran en planos que no están bien enfocados por la cámara
- Un tamaño mínimo que han de tener las partículas para tenerlas en cuenta, de modo que no se analicen aquellas burbujas para las que la imprecisión en su medida sea demasiado elevada.

El programa nos ofrece una matriz de salida llamada “centroids” que contiene la siguiente información:

- Las tres primeras columnas almacenan las coordenadas horizontal y vertical de la posición del centro de la burbuja en el tiempo.
- La cuarta columna contiene información acerca del tamaño de la burbuja; almacena el valor de su área a la que llama “masa”
- Las tres últimas columnas guardan el valor de los momentos de inercia de la burbuja y se du producto de inercia. Como veremos más adelante, estos datos nos serán útiles para determinar el grado de esfericidad de la partícula.

Utilizaremos como ejemplo una sesión en la que conseguimos tener una sola burbuja en el plano enfocado. Los ejes de las imágenes grabadas coinciden con los que seleccionamos para el planteamiento teórico:

- Las burbujas avanzan en sentido positivo del eje horizontal de la imagen, desde el electrodo hacia la superficie libre del líquido
- El transductor se encontraría en la parte superior de la imagen, generando pulsos acústicos que avanzan en sentido negativo del eje vertical

Mostramos a continuación una de las imágenes de la sesión:

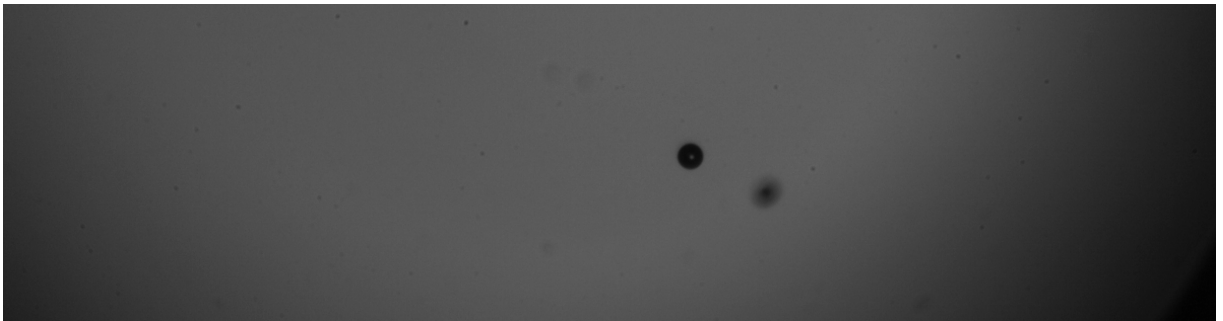


Figura 5.8 Imagen sesión experimental A

Analizaremos la trayectoria de la burbuja que se distingue de forma totalmente nítida. Su trayectoria no se verá afectada por la burbuja desenfocada que se encuentra tras ella ya que está en otro plano y como veremos ambas llevan trayectorias paralelas, señal de que no aparecen fuerzas secundarias de Bjerknes entre ellas.

Además de ofrecernos la matriz de datos antes mencionada, el código proporciona en la que se sigue la trayectoria de las burbujas que superan los umbrales.

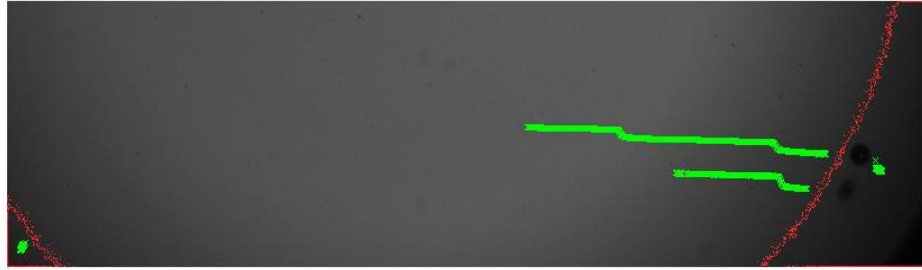


Figura 5.9 Trayectorias dadas por el programa Trajanalysis

En las trayectorias de ambas burbujas se comprueba la inexistencia de fuerza secundaria de Bjerknes entre las mismas puesto que se mantienen paralelas. Los escalones que se aprecian, dos en el caso de la burbuja considerada, se deben al efecto de la fuerza de Bjerknes sobre la burbuja, que tal y como predice la teoría hace que la burbuja se desplace en la dirección del ultrasonido alejándose de su fuente.

5.3.3 Código “gettrajectories”

Para poder ejecutar este programa es necesario utilizar como entrada la matriz de datos “centroids” junto con un umbral para el nivel de gris de las burbujas.

Este programa representa las trayectorias de los centros de las burbujas que selecciona y recoge cada una de ellas en una matriz con los campos X, Y,t.

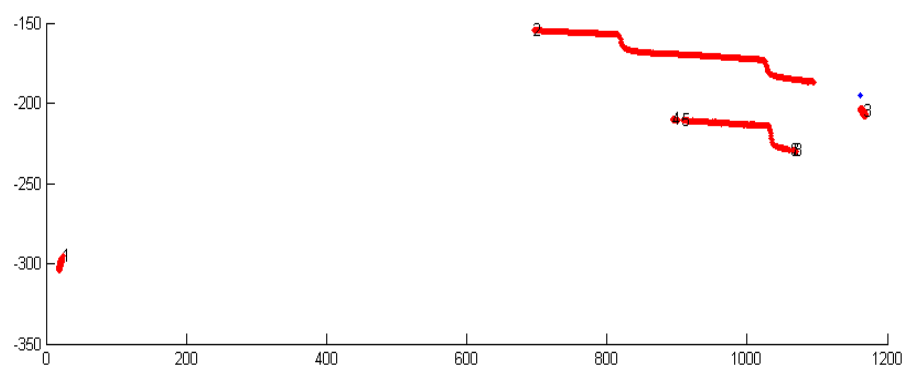


Figura 5.10 Trayectorias dadas por el programa Gettrajectories

La trayectoria perteneciente a la burbuja que vamos a analizar en esta sesión es la número 2.

5.3.4 Código “bjerknanalysis”

Dentro de este código tenemos que seleccionar la trayectoria que queremos analizar, que como acabamos de decir, será la número dos.

En los programas anteriores las distancias que se almacenan están dadas en pixels; sin embargo en este programa se aplica el factor de escala de la calibración de las imágenes para convertir esos valores en μm reales.

Una transformación similar ha de hacerse para convertir los tiempos entre imágenes en segundos de tiempo real. Para esta conversión se emplea la tasa conocida como fps (“frames per second” o imágenes por segundo):

$$t(s) = \frac{n^{\circ} \text{ imágenes}}{fps}$$

Se calculan además los siguientes valores:

- El radio de la burbuja. A partir de las imágenes el programa calcula el área de la burbuja como la de un círculo de radio R, por lo que se obtiene el radio como $R = \sqrt{A/\pi}$, siendo A es área de la burbuja.
- Los autovalores del tensor de inercia, I_1 e I_2 . A partir de ellos se calcula un parámetro de circularidad de la burbuja

$$Circ = \frac{I_1 - I_2}{(I_1 + I_2)/2}$$

La burbuja será esférica cuando los autovalores sean iguales o lo más parecidos posible, dando lugar a un parámetro de circularidad de valor nulo.

- La velocidad de la burbuja, aplicando diferencias finitas.

Estos cálculos son representados en las gráficas que analizamos a continuación:

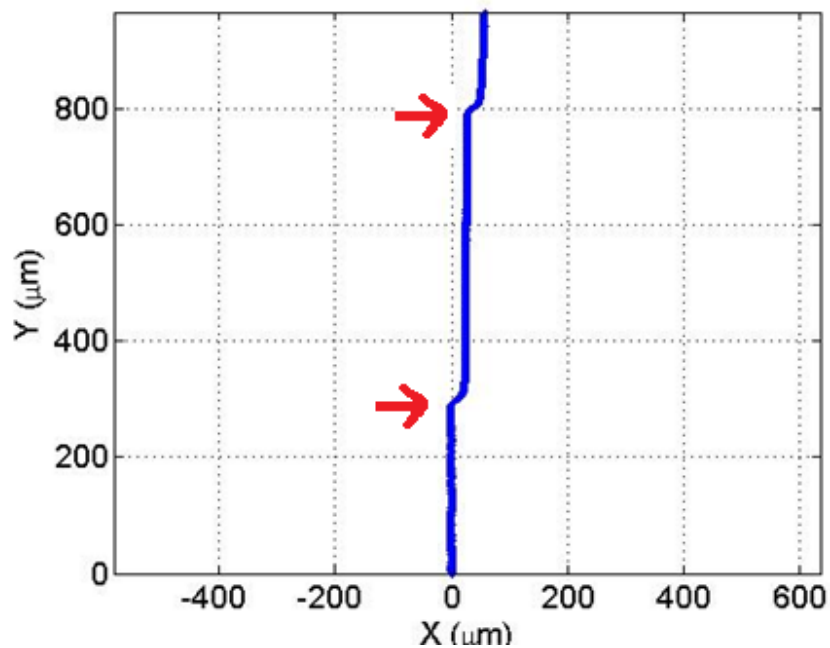


Figura 5.11 Coordenadas de la burbuja en su trayectoria

En esta gráfica se han traspuesto los ejes coordenados de las imágenes girándolos 90 grados en sentido contrario a las agujas del reloj. El objetivo es representar la trayectoria de la partícula de forma más intuitiva, ya que la imagen que recoge la cámara está girada respecto al experimento real. Las flechas nos indican el efecto del ultrasonido en la trayectoria de la burbuja.

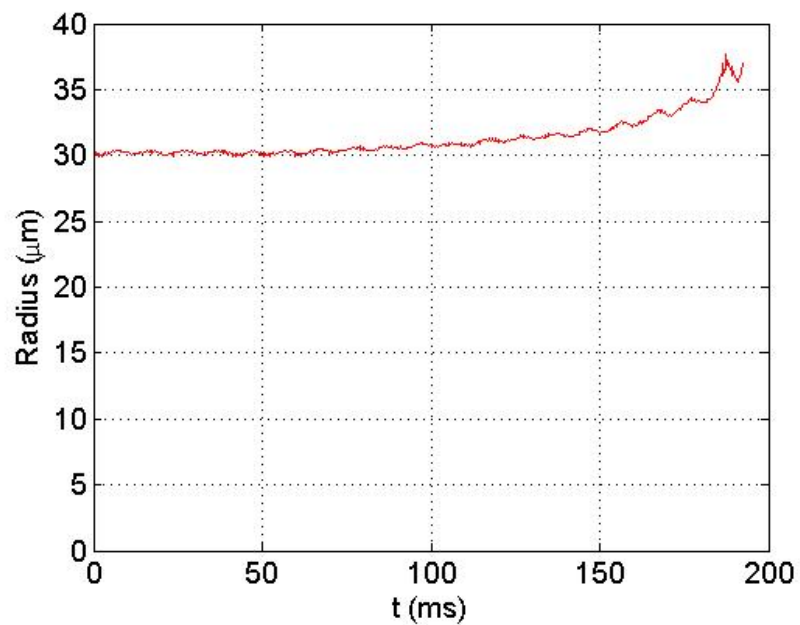


Figura 5.12 Radio de la burbuja

El radio de la burbuja se encuentra entorno a unas $30.1 \mu m$. Si medimos directamente los pixels que ocupa la burbuja en la imagen y le aplicamos la escala de calibración obtenemos este mismo valor.

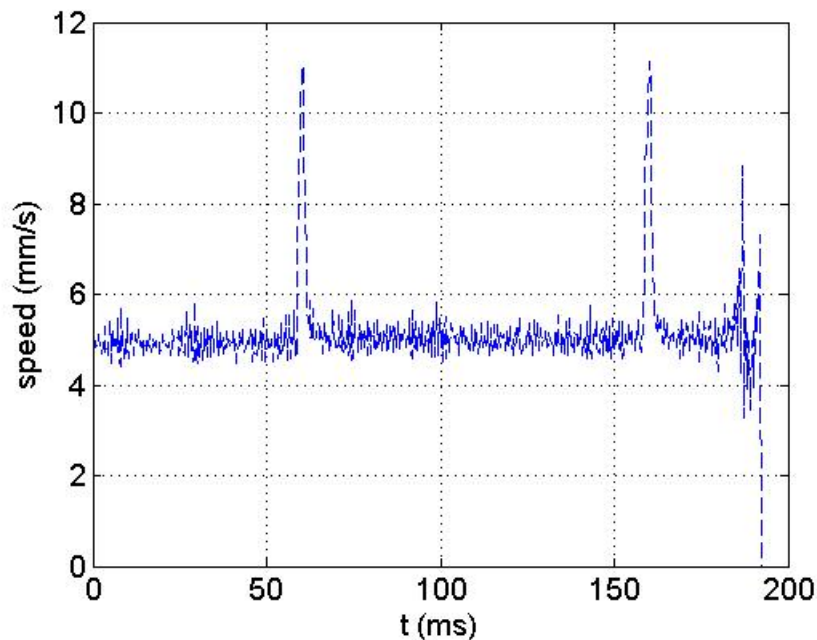


Figura 5.13 Velocidad de la burbuja

La gráfica para la velocidad nos muestra un valor estacionario (salvo ruido numérico) que se encuentra entorno a 5 mm/s. Ése sería el valor de la velocidad a la que asciende la burbuja en el agua por efecto de la flotabilidad.

Si resolvemos nuestro problema teórico imponiendo que la amplitud de la onda acústica es nula, obtendremos esa misma velocidad como velocidad de la burbuja en el eje horizontal, que para una burbuja de $30.1 \mu m$ es de unos 1.973 mm/s.

Es importante que el valor teórico y el experimental presenten el mismo orden de magnitud; sin embargo hay alrededor de unos 3 mm/s de diferencia entre ambos. Probablemente esta diferencia se deba a que el líquido presente una velocidad de arrastre que se suma a la velocidad que presenta la burbuja como consecuencia de la flotabilidad. Sin embargo, como en este vídeo sólo tenemos una burbuja analizable, no podemos calcular esa velocidad de arrastre. Este cálculo es realizado en el siguiente apartado para dos sesiones de ensayo en las que podemos analizar dos burbujas que no interfieren entre sí.

Si nos fijamos vemos que la velocidad presenta dos picos que coinciden con los pulsos de insonación acústica. Para poder comparar con los valores teóricos, asumiremos que en los picos de velocidad tenemos un flanco de subida y otro de bajada, entre los cuales se encuentra el valor correspondiente al régimen estacionario de insonación.

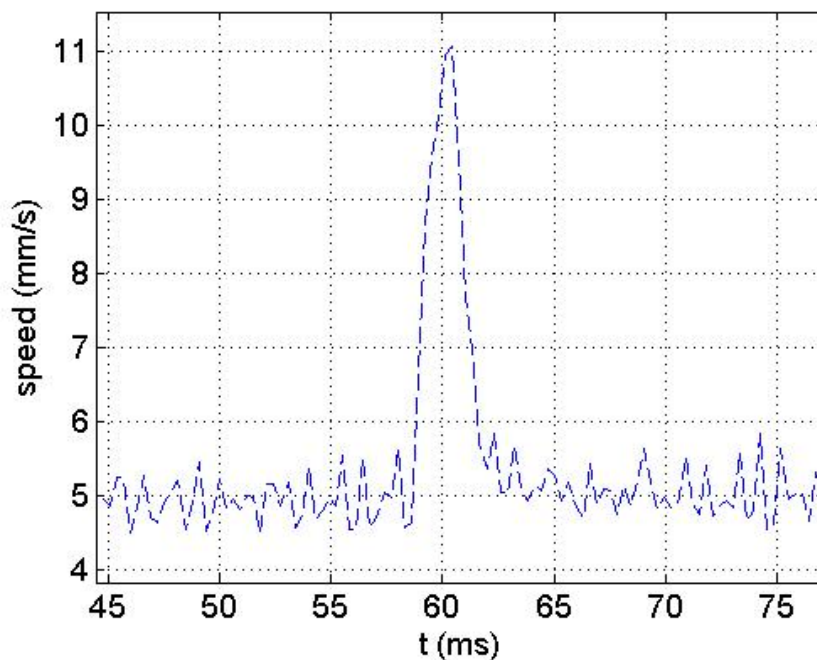


Figura 5.14 Zoom velocidad de la burbuja

Este valor estacionario es de alrededor de unos 11 mm/s. Teniendo en cuenta que en la gráfica se representa el módulo de la velocidad de la burbuja, y asumiendo que la velocidad ascensional es la velocidad en el eje x, calcularemos la velocidad en el eje "y" que será la debida a la fuerza de Bjerknes:

$$\begin{cases} V = 11 \text{ mm/s} \\ V_x = 5 \text{ mm/s} \end{cases} \Rightarrow V_y = \sqrt{V^2 - V_x^2} = 9.8 \text{ mm/s}$$

La velocidad media estacionaria debida a la insonación es de unos 12.8 mm/s calculada de forma teórica para una amplitud de la señal acústica de $A = 10^3 \text{ Pa}$. Con este valor escogido para la amplitud conseguimos que la resolución numérica del problema nos ofrezca una velocidad del orden de la experimental, lo que nos indica que de haberse alcanzado el régimen estacionario en el experimento, la amplitud real de la señal es cercana a la seleccionada.

Si variamos el valor de A en la resolución numérica sería posible obtener un valor igual al del ensayo, pero para realizar la comparativa hemos admitido la suposición de que en el pico de la velocidad de la burbuja en la gráfica se alcanza el régimen estacionario, cuando es posible que la burbuja se encontrara todavía en el flanco de subida y que por tanto no se hubiese alcanzado el estacionario cuando el pulso acústico acaba.

Por otro lado, para saber si puede haberse alcanzado el régimen estacionario bajo la insonación, hay que tener en cuenta el tiempo que dura el pulso acústico en el ensayo. Para esta sesión se utilizó un ciclo de carga del 2%, por lo que la duración del ultrasonido es de 2 ms.

Si miramos en la gráfica, vemos que el pico total dura unos 3 ms, de los cuales se invierte entre 1,5 y 2 ms en el flanco de subida hasta alcanzar el punto máximo. Esto quiere decir que en la duración del pulso acústico la burbuja aumenta su velocidad y llega al máximo cuando han transcurrido alrededor de 2 ms del inicio de la señal.

Si vemos la gráfica teórica para la velocidad en “y” vemos que para ese tiempo se está alcanzando el régimen estacionario.

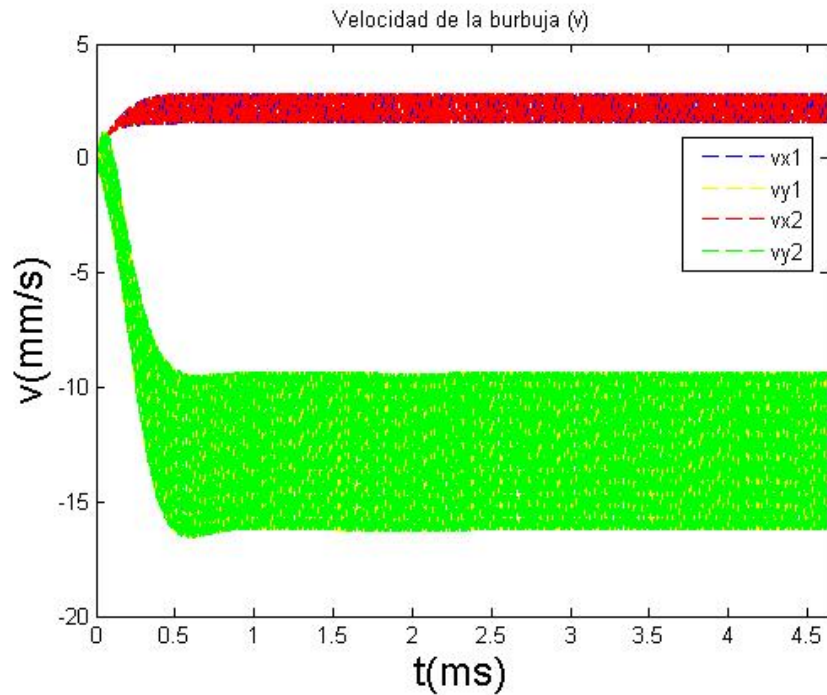


Figura 5.15 Componentes de la velocidad de la burbuja en caso de ser insonada con una onda seno (1) y con una onda coseno (2)

Por tanto, sí que es posible que la burbuja hubiese alcanzado el régimen estacionario durante la insonación o estuviese a punto de alcanzarlo, siendo muy razonable entonces el resultado numérico obtenido con la condición para la amplitud de la onda acústica que hemos elegido.

5.4 CÁLCULO DE LAS VELOCIDADES INVOLUCRADAS

Compararemos las velocidades teóricas y experimentales y trataremos de justificar las diferencias entre ambas.

5.4.1 Velocidad ascensional de la burbuja

Se trata de la velocidad a la que la burbuja asciende a través del líquido como consecuencia de la flotabilidad, en ausencia de ultrasonido.

En caso de que la velocidad a la que la burbuja asciende en el vídeo difiera de la calculada teóricamente, tendremos que plantearnos posibles causas que justifiquen esta diferencia:

1. Es posible que en el ensayo el líquido presente una velocidad media distinta de cero. Actuará como una componente de arrastre de las burbujas, que se añadirá a su velocidad teórica de ascenso.

Para poder comprobar si el líquido presenta una **velocidad de arrastre** hemos de contar como mínimo con dos burbujas analizables en el vídeo que además han de aparecer juntas, ya que la velocidad media del líquido por la que se ven afectadas puede deberse a la aparición de corrientes internas como consecuencia de vibraciones en el montaje, que finalmente se irán disipando, amortiguándose su velocidad hasta desaparecer; por ello las burbujas analizadas deben salir juntas en las imágenes, asegurándose así que actuará sobre ellas la misma componente del campo fluido.

Asimismo, para calcular el valor de la velocidad media del líquido se requieren como mínimo dos burbujas con el fin de establecer una correlación entre su radio y la velocidad del líquido. La velocidad correspondiente a una burbuja de radio nulo será la componente de arrastre que introduce el campo fluido externo.

2. La generación de las burbujas en el electrodo puede conferirles una cierta velocidad de salida, que podremos apreciar si grabamos justo a la salida del electrodo. Las burbujas tienen una **inercia** muy pequeña, por lo que el efecto de esta velocidad se irá perdiendo de forma paulatina hasta desaparecer totalmente cuando la burbuja se encuentra todavía muy cerca del electrodo. Si la velocidad media de la burbuja va decreciendo con el tiempo, será una señal de que presenta una componente inercial.

Estudiaremos estas posibilidades para las sesiones experimentales B y C

- **Sesión B**

Estudiaremos las dos burbujas que aparecen en la imagen:

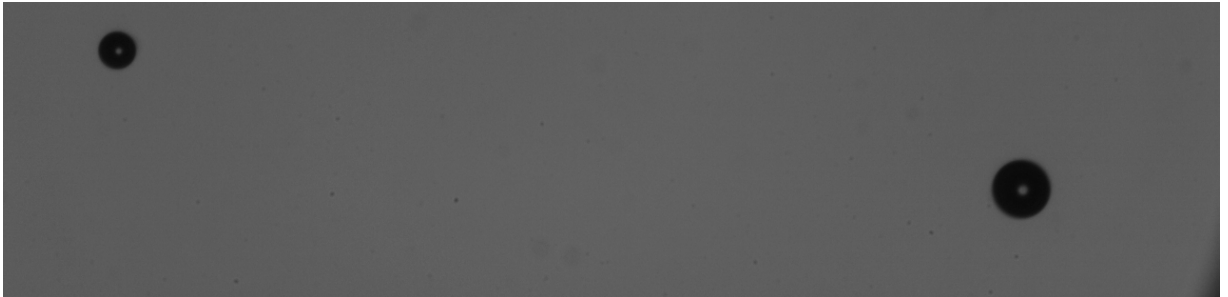


Figura 5.16 Burbujas analizadas, sesión experimental B

Llamaremos burbuja 1 a la de menor tamaño y 2 a la grande. Calcularemos de forma detallada el rango de valores entre los que se encuentra la velocidad teórica y experimental de cada una de ellas.

Burbuja 1

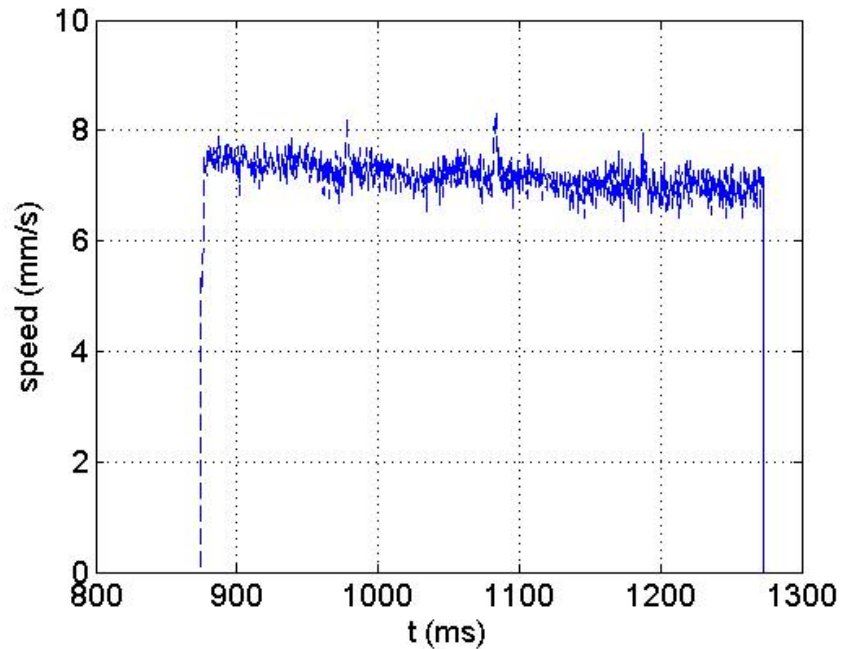


Figura 5.17 Velocidad total, burbuja pequeña

Según la gráfica la velocidad media de la burbuja es de $V_{exp} = 7 \pm 0.5 \text{ mm/s}$, por lo que los valores máximo y mínimo para la velocidad experimental son:

$$\begin{cases} V_{exp}^{min} = 6.5 \text{ mm/s} \\ V_{exp}^{max} = 7.5 \text{ mm/s} \end{cases}$$

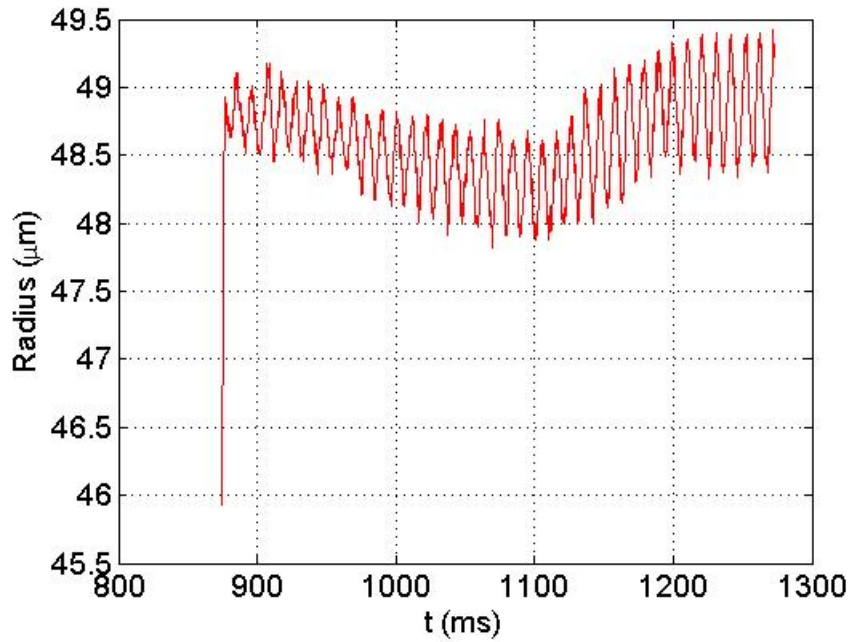


Figura 5.18 Radio, burbuja pequeña

El radio de la burbuja será de $R = 48.65 \pm 0.75 \mu\text{m}$. Calcularemos las velocidades teóricas en ausencia de insonación para estos dos valores extremos del radio. De esta forma conseguiremos el rango de velocidades teóricas máxima (asociada al radio máximo de la burbuja) y mínima (para el mínimo radio):

$$\begin{cases} V_{teor}(R = 47.9 \mu\text{m}) = V_{teor}^{max} = 4.997 \text{ mm/s} \\ V_{teor}(R = 49.4 \mu\text{m}) = V_{teor}^{max} = 5.315 \text{ mm/s} \end{cases}$$

Como vemos, entre la velocidad mínima experimental y la máxima teórica existe una diferencia de un 26.34% respecto a la primera de ellas.

- [Burbuja 2](#)

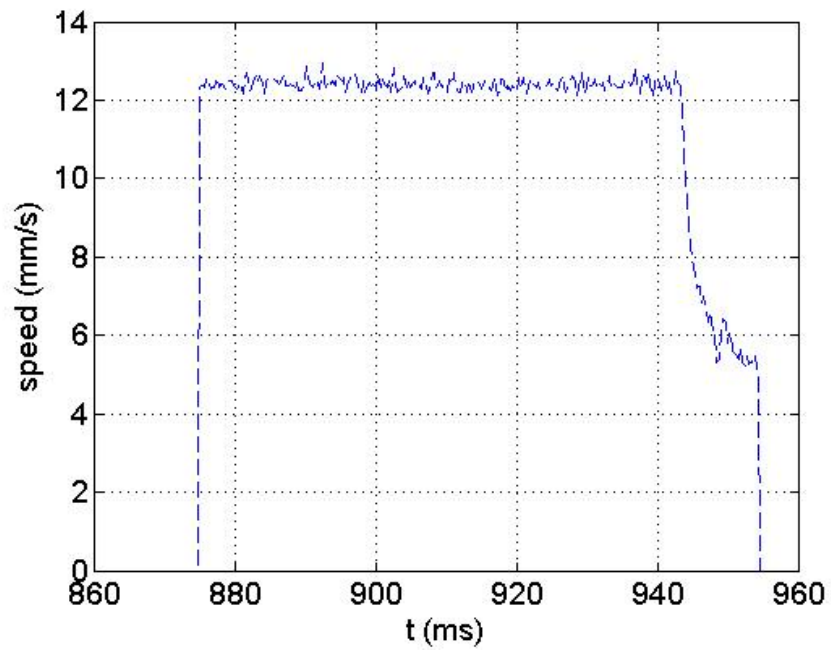


Figura 5.19 Velocidad total, burbuja grande

La velocidad media experimental es de $V_{exp} = 12.45 \pm 0.45 \text{ mm/s} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{exp}^{min} = 12 \text{ mm/s} \\ V_{exp}^{max} = 12.45 \text{ mm/s} \end{array} \right\}$

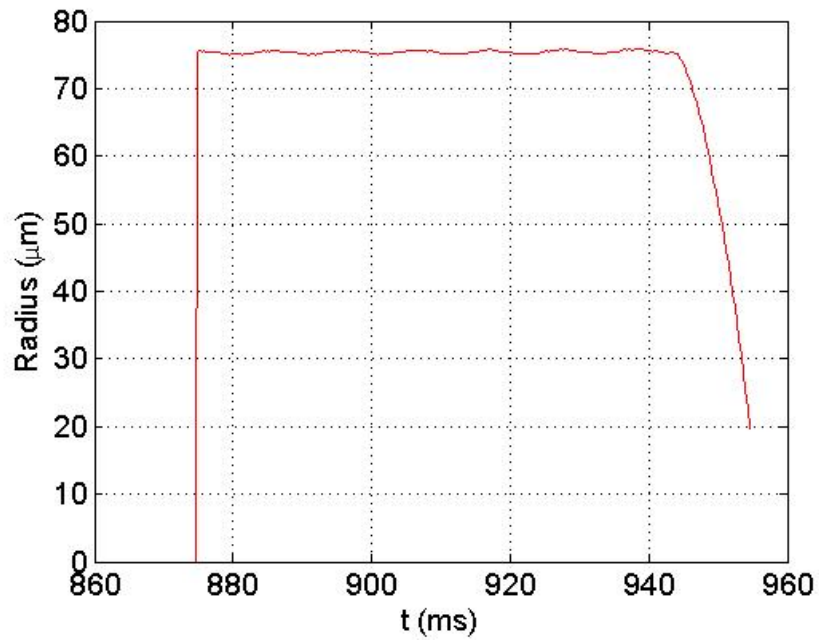


Figura 5.20 Radio, burbuja grande

El radio de la burbuja es de $R = 75.4 \pm 0.4 \mu m$. Las velocidades teóricas para estos radios son:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{teor}(R = 75 \mu m) = V_{teor}^{min} = 12.25 \text{ mm/s} \\ V_{teor}(R = 75.8 \mu m) = V_{teor}^{max} = 12.513 \text{ mm/s} \end{array} \right\}$$

En el caso de la burbuja de mayor tamaño, las velocidades experimentales y teóricas se encuentran en el mismo rango.

Vemos que para las dos burbujas su velocidad media es constante con el tiempo, lo que nos indica que no presentan una componente inercial. Teniendo en cuenta esto y la diferencia de resultados en la burbuja de menor tamaño, supondremos que la velocidad media del líquido es no nula y emplearemos dos formas distintas para calcularla:

- En primer lugar, proponemos establecer una correlación entre las velocidades experimentales y los radios de las burbujas.

Tomaremos para ello, por ejemplo, el mínimo radio de las partículas y su velocidad mínima:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 47.9 \mu m & R_2 = 75 \mu m \\ V_1 = 6.5 \text{ mm/s} & V_2 = 12 \text{ mm/s} \end{array}$$

La recta que relaciona ambos puntos es

$$V = 0.203R - 3.221 \text{ mm/s}$$

La velocidad que introduce el líquido sería la correspondiente a una burbuja de radio nulo, que en este caso es de $V_{drift} = -3.221 \text{ mm/s}$. Se trata de una velocidad negativa que puede deberse a la existencia de flujos residuales en el líquido o incluso a oscilaciones de la cámara.

- El hecho de que sea la burbuja pequeña la que presenta una velocidad distinta a la teórica nos hace suponer que sí que existe un arrastre por parte del líquido. Las burbujas creadas a partir de la electrolisis del agua no son totalmente limpias, sino que siempre presentan en su superficie una capa de porquería que las rodea. Esta cubierta afecta a la burbuja de manera diferente en función de su tamaño:

La cubierta afecta más a las burbujas pequeñas, haciendo que su interfase con el líquido actúe como una pared rígida en la que se da la condición de no deslizamiento.

Sin embargo, una burbuja más grande presenta más espacio en su interior para que el gas contenido se ponga en circulación, con lo que el líquido es capaz de poner en movimiento el gas interior de la partícula, haciendo que la cubierta no se comporte como sólida.

Así pues, el arrastre ejercido por el líquido se apreciará de forma más precisa en las burbujas de menor tamaño. De acuerdo con esto calcularemos dicha velocidad de modo que se ajuste con el comportamiento de la burbuja pequeña.

$$V_{drift} = V_{exp1} - V_{teor1} = 6.5 - 4.997 = 1.503 \text{ mm/s}$$

En estas condiciones la velocidad experimental de la burbuja grande debería ser:

$$V_{exp2} = V_{drift} + V_{teor2} = 1.503 + 12.25 = 13.753 \text{ mm/s}$$

De esta forma estamos ajustando la velocidad de la burbuja pequeña y desajustando la de la burbuja grande, cuyos valores ya convergían; pero como acabamos de explicar, debido al efecto

de la cubierta lo único que sabemos es que la burbuja que nos da información más precisa acerca de su velocidad es la de menor tamaño.

Tras ajustar la velocidad de arrastre del líquido obtenemos valores muy próximos a los experimentales. El orden de magnitud de los errores existentes se puede achacar a diferencias en la viscosidad dinámica y la tensión superficial del líquido debido a la temperatura, a las partículas que recubren las burbujas, etc. Si además tenemos en cuenta los efectos térmicos, estos errores quedarían más que justificados.

- **Sesión C**

Para esta sesión analizaremos el comportamiento de las dos burbujas aisladas que se ven en la imagen. Llamaremos burbuja 1 a la de menor tamaño y 2 a la grande.

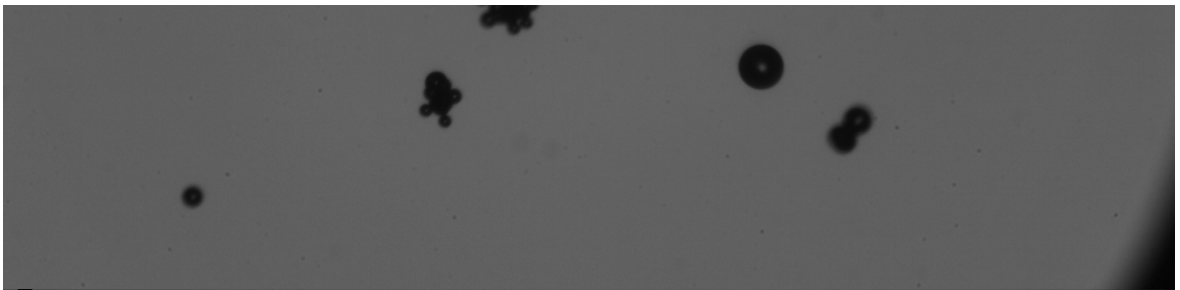


Figura 5.21 Burbujas analizadas, sesión experimental C

Burbuja 1

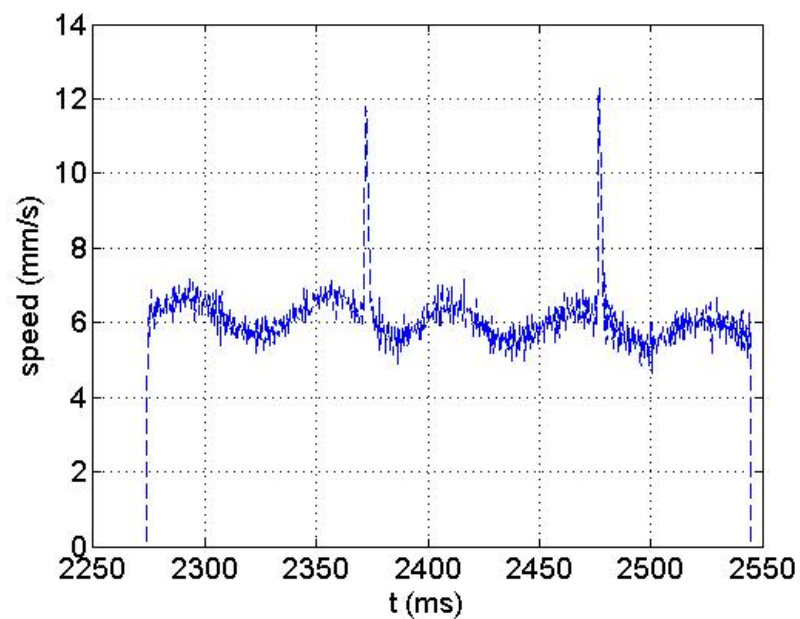


Figura 5.22 Velocidad total, burbuja pequeña

La velocidad media de la burbuja sin presencia de ultrasonido es $V_{exp} = 6 \pm 1 \text{ mm/s} \rightarrow$

$$\begin{cases} V_{exp}^{min} = 5 \text{ mm/s} \\ V_{exp}^{max} = 7 \text{ mm/s} \end{cases}$$

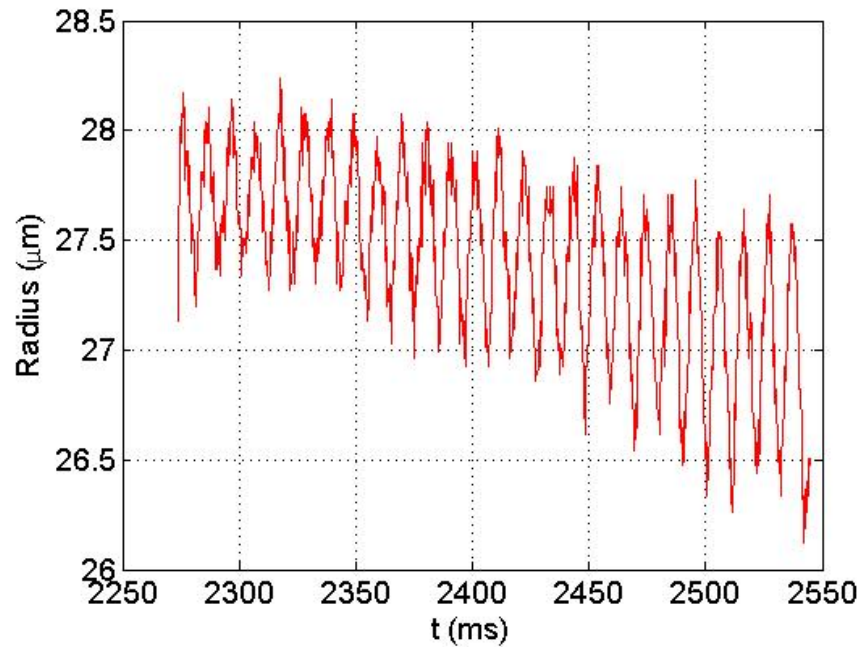


Figura 5.23 Radio, burbuja pequeña

El radio de la burbuja será de $R = 27.25 \pm 0.75 \mu\text{m}$. Las velocidades teóricas asociadas a los radios extremos son:

$$\begin{cases} V_{teor}(R = 26.5 \mu\text{m}) = V_{teor}^{min} = 1.53 \text{ mm/s} \\ V_{teor}(R = 28 \mu\text{m}) = V_{teor}^{max} = 1.708 \text{ mm/s} \end{cases}$$

La diferencia entre el ensayo y la teoría es considerable, lo que nos induce a pensar en un arrastre por parte del líquido.

Burbuja 2

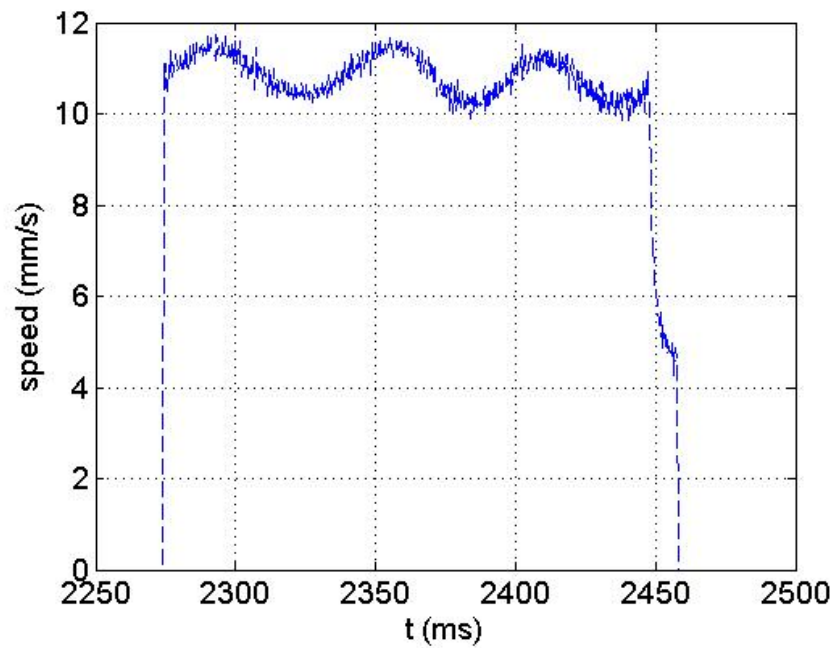


Figura 5.24 Velocidad total, burbuja grande

La velocidad media de la burbuja sin presencia de insonación es $V_{exp} = 10.75 \pm 0.75 \text{ mm/s} \rightarrow$

$$\begin{cases} V_{exp}^{min} = 10 \text{ mm/s} \\ V_{exp}^{max} = 11.5 \text{ mm/s} \end{cases}$$

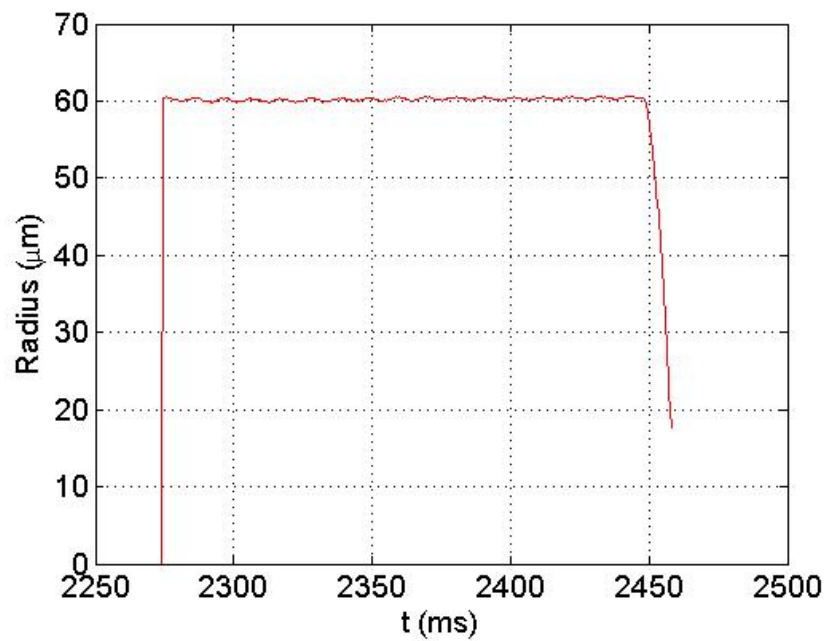


Figura 5.25 Velocidad total, burbuja pequeña

El radio de la burbuja será de $R = 60.2 \pm 0.45 \mu m$. Las velocidades teóricas asociadas a los valores límites del radio son:

$$\begin{cases} V_{teor}(R = 59.75 \mu m) = V_{teor}^{min} = 7.775 \text{ mm/s} \\ V_{teor}(R = 60.65 \mu m) = V_{teor}^{max} = 8.01 \text{ mm/s} \end{cases}$$

Igual que ocurre para la burbuja pequeña, las velocidades teóricas son inferiores a las experimentales, por lo que parece que el campo fluido no se encuentra en reposo. Calcularemos la posible velocidad de arrastre del líquido mediante los dos métodos que utilizamos en la sesión B:

- Para establecer una correlación entre las velocidades experimentales y los radios de las burbujas, tomamos los valores mínimos:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 26.5 \mu m & R_2 = 59.75 \mu m \\ V_1 = 5 \text{ mm/s} & V_2 = 10 \text{ mm/s} \end{array}$$

La recta que relaciona ambos puntos es

$$V = 0.15R + 1.015 \text{ mm/s}$$

La velocidad que introduce el líquido sería la correspondiente a una burbuja de radio nulo, que en este caso es de $V_{drift} = 1.015 \text{ mm/s}$. Tiene sentido ya que es una velocidad positiva; sin embargo su valor no consigue ajustar los datos:

$$\begin{aligned} V_{teor1} &= V_1 - V_{drift} = 5 - 1.015 = 3.985 \text{ mm/s} \\ V_{teor2} &= V_2 - V_{drift} = 10 - 1.015 = 8.985 \text{ mm/s} \end{aligned}$$

Estas velocidades teóricas que acabamos de calcular son las que deberían tener unas burbujas con la velocidad experimental considerada y con ese arrastre por parte del líquido. Pero si las comparamos con las velocidades teóricas reales, vemos que difieren, sobre todo en el caso de la burbuja pequeña, por lo que ajustaremos el arrastre de la burbuja para ella.

- Como hemos explicado para la sesión B, debido al efecto de la cubierta sabemos que la burbuja de menor tamaño nos da información más precisa sobre su velocidad. Por ello vamos a ajustar la velocidad media del líquido para que sus valores experimental y teórico concuerden:

$$V_{drift} = V_{exp1} - V_{teor1} = 5 - 1.53 = 3.47 \text{ mm/s}$$

Así, la velocidad experimental que debería tener la burbuja grande es:

$$V_{exp2} = V_{drift} + V_{teor2} = 3.47 + 7.775 = 11.245 \text{ mm/s}$$

Este valor se encuentra dentro del rango que nos da el análisis del vídeo, por lo que podemos tomar esta velocidad de arrastre calculada como válida.

5.4.2 Velocidad estacionaria bajo el efecto del ultrasonido

Realizaremos este análisis sobre las burbujas de las sesiones experimentales B y C.

Los datos relativos a estos ensayos que debemos conocer para poder llevar a cabo la comparativa con el problema teórico son:

$$A = ?$$

$$f = 0.5 \text{ MHz}$$

$$t_{\text{ultrasonido}} = 2 \text{ ms}$$

Es decir, se generan pulsos acústicos de 2 ms de duración con la frecuencia del transductor utilizado, que es de 0.5 MHz, y donde la amplitud de la onda es desconocida. El generador de pulsos empleado presenta un parámetro que permite variar la amplitud de la onda pero no nos ofrece su valor absoluto. Cabe destacar que en los dos ensayos que vamos a estudiar se empleó el mismo valor para ese parámetro, por lo que en teoría el valor de la amplitud acústica es igual en ambos casos. Será un parámetro libre en nuestro problema que utilizaremos para ajustar los datos.

Burbuja 1, sesión B

Como ya explicamos en el apartado 5.3, a través del código “bjerknesanalysis” podemos representar la evolución de la posición de la burbuja y su velocidad total.

Según los ejes escogidos, la componente horizontal de la velocidad es la velocidad a la que la burbuja asciende por flotabilidad, y la componente vertical es la velocidad que induce en la burbuja la fuerza de Bjerknes debido a la presencia del ultrasonido.

$$V_y = V_{FB} = \sqrt{V^2 - V_{asc}^2}$$

Durante la duración del ultrasonido se produce un pico en la velocidad de la burbuja ya que aparece una componente vertical antes inexistente. Supondremos que en estos picos tenemos un flanco de subida debido al régimen transitorio al comenzar la insonación, un flanco de bajada que tiene lugar cuando el ultrasonido se apaga y que entre ambos hay un pequeño tramo plano perteneciente al régimen estacionario. Emplearemos dicho valor para compararlo con la velocidad estacionaria teórica.

Si nos fijamos en la gráfica 5.17, que nos muestra la evolución de la velocidad de la burbuja considerada, vemos que durante la insonación podríamos suponer como velocidad estacionaria $V = 8.2 \text{ mm/s}$. Para el radio de la burbuja y la velocidad de ascensión tomaremos los valores mínimos obtenidos en el apartado anterior:

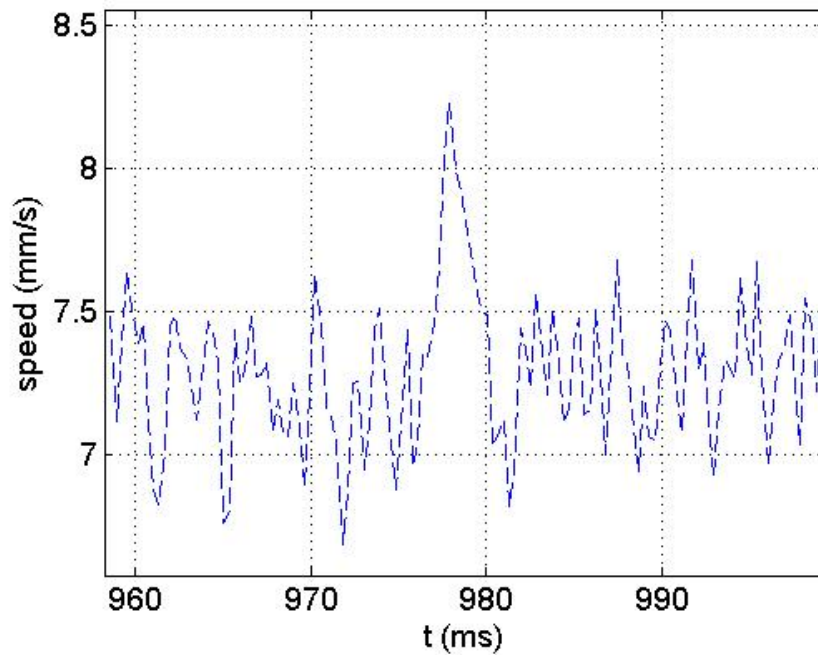


Figura 5.26 Zoom velocidad burbuja 1, sesión B

$$R = 47.9 \mu m$$

$$V_{asc} = 6.5 \text{ mm/s} \Rightarrow V_{FB} = \sqrt{V^2 - V_{asc}^2} = \sqrt{8.2^2 - 6.5^2} = 4.999 \approx 5 \text{ mm/s}$$

$$V = 8.2 \text{ mm/s}$$

Ahora, para ese mismo valor del radio y para la frecuencia del transductor, calcularemos la velocidad estacionaria teórica bajo insonación. Puesto que esta velocidad, V_y de la burbuja, es oscilatoria, calcularemos su valor medio empleando medias temporales.

El problema es que para poder resolver el problema teórico necesitamos conocer otro parámetro como dato de entrada: la amplitud de la onda acústica A . Sin embargo, la amplitud de la señal generada por el equipo del laboratorio es desconocida, por lo que tendremos que resolver nuestro problema probando con distintos órdenes de magnitud para la amplitud hasta encontrar el valor que nos ofrezca una velocidad del orden de la experimental. Probaremos con valores de A desde 1 Pa hasta unos 10^5 Pa .

La amplitud que debería tener la señal acústica para que la velocidad debida a la insonación coincida con la experimental es de unos $5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, un valor demasiado elevado.

Burbuja 1, sesión C

Según la gráfica 5.20, durante el pulso acústico podemos tomar una velocidad estacionaria de $V = 8.2 \text{ mm/s}$. Al igual que en el caso anterior, tomaremos el radio y velocidad ascensional mínimos:

$$R = 26.5 \mu\text{m}$$
$$V_{asc} = 5 \text{ mm/s} \Rightarrow V_{FB} = \sqrt{V^2 - V_{asc}^2} = \sqrt{12^2 - 5^2} = 10.91 \text{ mm/s}$$
$$V = 12 \text{ mm/s}$$

Resolveremos el problema teórico para este radio y para las condiciones experimentales y probaremos de nuevo dando distintos órdenes de magnitud a la amplitud acústica. En este caso, el valor requerido para que la velocidad estacionaria teórica sea del orden de la experimental es de $A = 1.8 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, que es un valor más razonable que el obtenido para la sesión B. Para este valor los resultados teóricos para la velocidad de la burbuja y para su posición son:

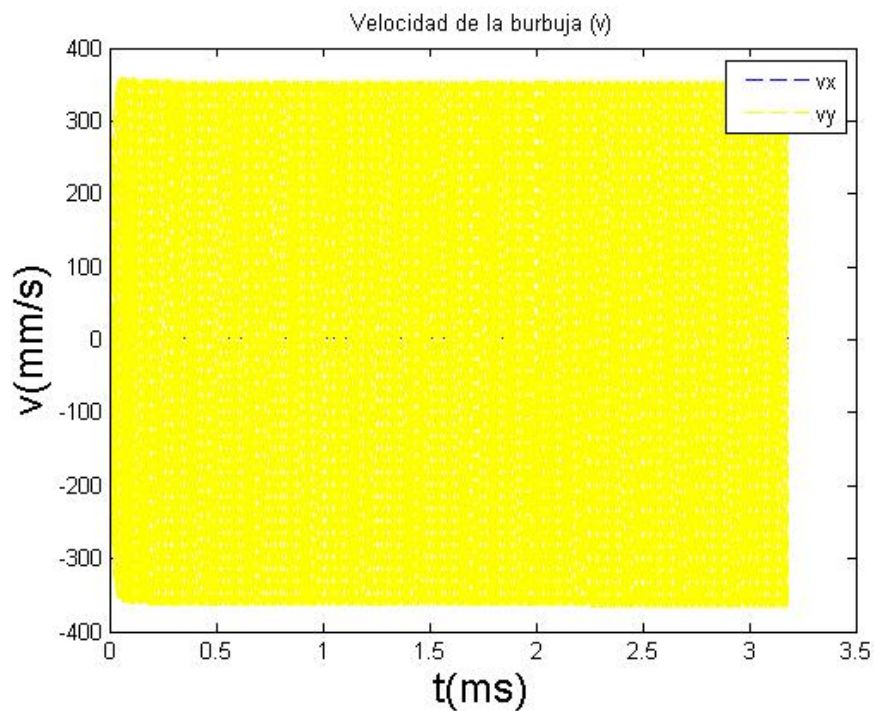


Figura 5.27 Velocidad burbuja 1, sesión C

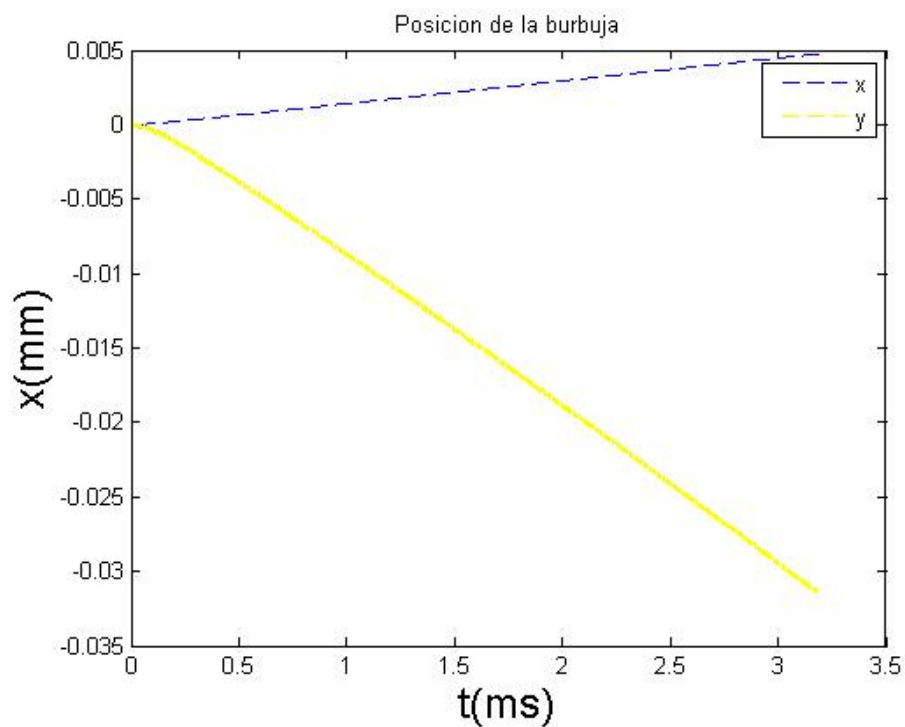


Figura 5.28 Posición burbuja 1, sesión C

Vemos que para los 2ms que dura el pulso acústico del ensayo, en teoría la partícula debería haberse alejado unos 0.02mm respecto al transductor en la dirección vertical.

A continuación mostramos la trayectoria de la burbuja del ensayo, obtenida con el programa "bjerknesanalysis". Como ya explicamos, en esta gráfica los ejes han sido girados con respecto a las imágenes para poder ver de forma más intuitiva el movimiento real de la partícula; para esta disposición la fuente del ultrasonido se encontraría en la parte izquierda de la gráfica, y la señal avanzaría en dirección horizontal hacia la derecha. Los escalones que se observan se corresponden con el efecto de la fuerza de Bjerknes, que como predice el estudio teórico, tiende a alejar la burbuja del transductor:

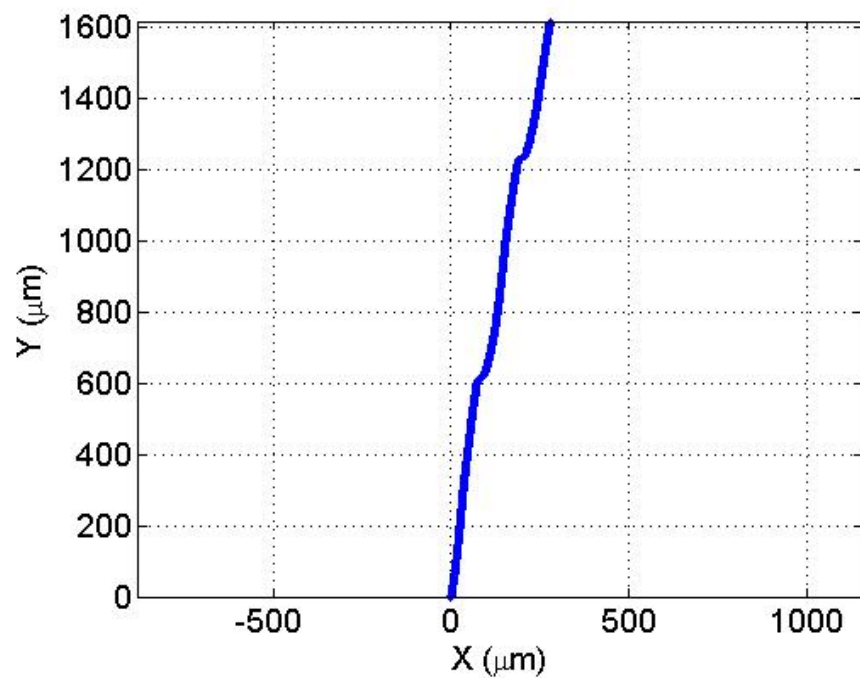


Figura 5.29 Trayectoria experimental burbuja 1, sesión C

En la siguiente imagen veremos más de cerca el escalón:

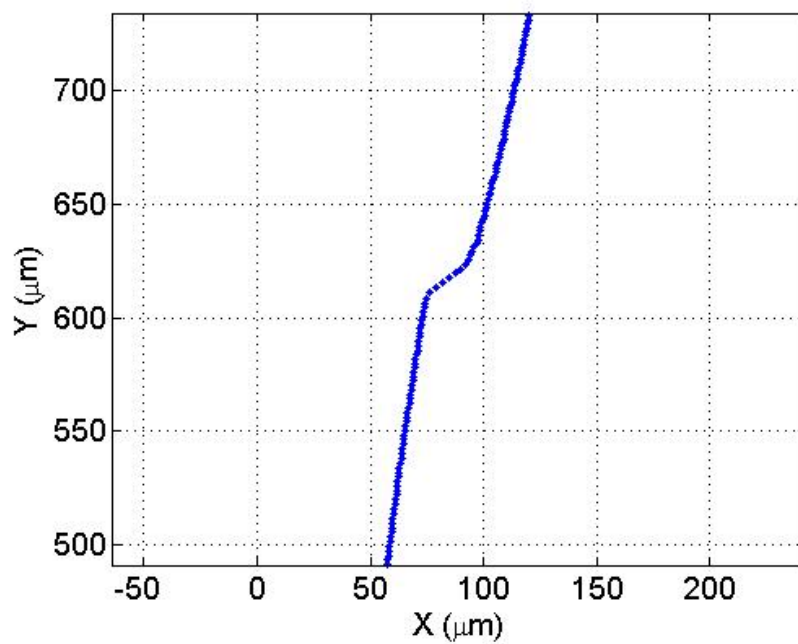


Figura 5.30 Zoom trayectoria experimental burbuja 1, sesión C

En estos ejes la distancia que recorre la burbuja por el ultrasonido será la horizontal. Vemos que la distancia horizontal que avanza es de unos $25\mu m$, es decir unos $0.025mm$, valor muy similar al que nos dice la teoría.

Como hemos comentado, los dos ensayos B y C fueron realizados con el mismo valor del parámetro que controla la amplitud de la onda acústica; por ello era de esperar que la amplitud requerida para que los valores experimentales y teóricos convergieran fuese la misma. En el caso del ensayo B el valor es demasiado elevado; por otro lado, el valor de la amplitud para la sesión C es más razonable y nos ha permitido justificar tanto la velocidad de la burbuja como su recorrido debido a la fuerza de Bjerknes. Esto nos lleva a pensar que la amplitud real del ensayo es muy cercana a los $1.8 \cdot 10^5 Pa$, mientras que en el ensayo B la velocidad experimental debe haber sido perturbada, por ejemplo, por la presencia de corrientes internas en el líquido. De hecho, para este ensayo tampoco fue posible ajustar la velocidad ascensional de las dos burbujas del vídeo.

Burbuja 2, sesiones B y C

Estas burbujas tienen un tamaño elevado y por ello no les afecta tanto el ultrasonido; si nos fijamos en las gráficas para sus velocidades, figuras 5.17 y 5.22 respectivamente, veremos que no se aprecian picos durante el pulso acústico. De la misma manera, sus trayectorias no presentan escalones, sino que son ligeramente desviadas. Por este motivo no tiene sentido realizar un análisis de velocidades o de posiciones para estas partículas.

5.5 ENSAYOS CON RESULTADOS CONTRARIOS A LOS TEÓRICOS

Según la teoría, la fuerza de Bjerknes siempre provoca que la burbuja se aleje de la fuente de la señal acústica con la dirección y sentido de avance de la misma. Esa misma reacción fue recogida en todos los experimentos realizados a excepción de uno. En dicha sesión las partículas reaccionaban acercándose al transductor, como puede verse en las gráficas que analizan en vídeo en cuestión:

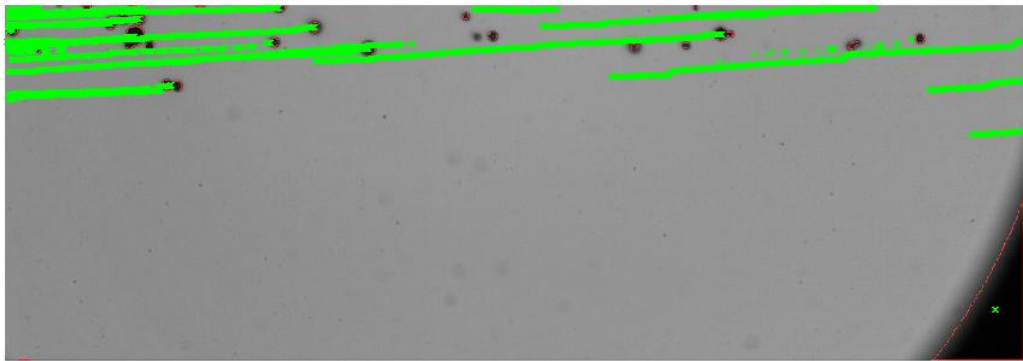


Figura 5.31 Movimiento de las burbujas, código Trajanalysis

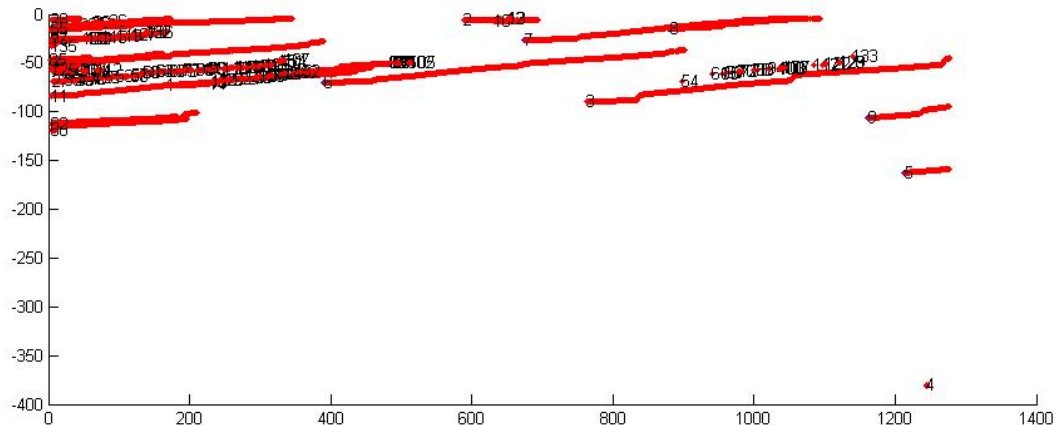


Figura 5.32 Trayectorias de las burbujas, código Gettrajectories

Analizaremos con más detalle la tercera trayectoria, ya que en ella se aprecia el efecto mencionado de forma más clara.

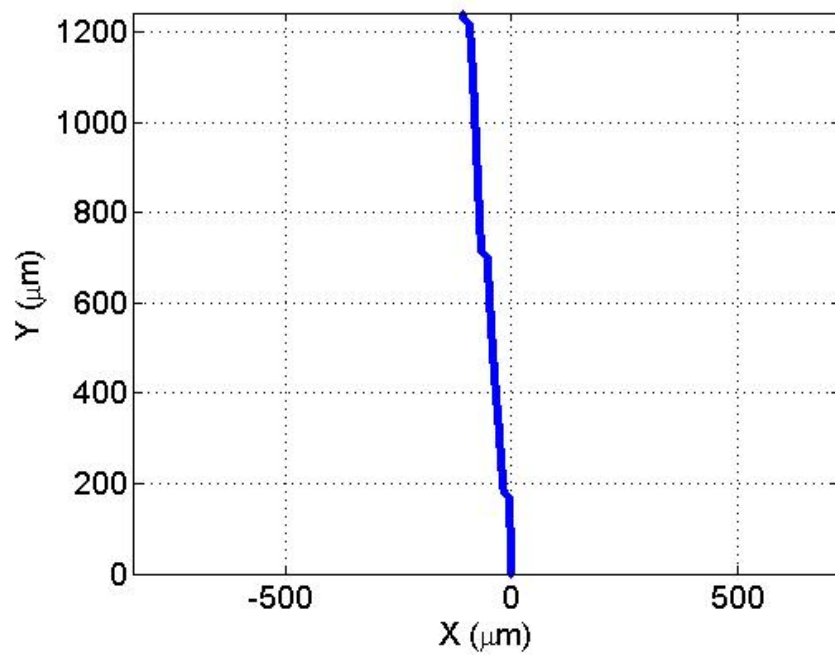


Figura 5.33 Evolución de la posición, burbuja 3

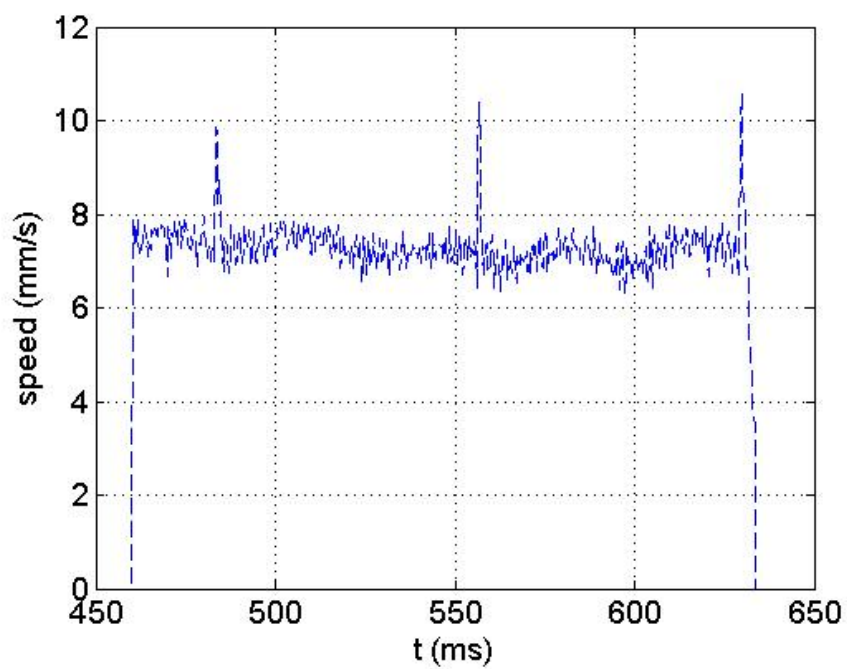


Figura 5.34 Velocidad total, burbuja 3

Como se ve en las gráficas, el pico en la velocidad debido al ultrasonido hace que la burbuja se acerque hacia el transductor, en contra de lo esperado. El motivo es la formación de una onda acústica estacionaria en el líquido. La expresión para estas ondas es :

$$\tilde{p}_{driv}(\vec{x}, \tau) = 2\epsilon \sin(M\vec{n}\vec{x}) \cdot \cos(\tau)$$

Los puntos de máxima presión de una onda estacionaria reciben el nombre de antinodos de presión, y los de presión nula se llaman nodos.

Estas ondas se forman cuando una onda seno y otra coseno con la misma frecuencia y amplitud, con la misma dirección pero sentidos contrarios, se encuentran y se suman. En el montaje de nuestros experimentos se pueden formar si la onda que sale del transductor se refleja en el cristal de la pecera y vuelve. Tal y como se explica en el artículo *Translational and radial motions of a bubble in an acoustic standing wave field* (T. Watanabe y Y. Kukita), ante una onda estacionaria las burbujas se comportan de forma distinta en función de su frecuencia y del radio de la burbuja:

- La frecuencia de la onda está por encima de la frecuencia de resonancia de la burbuja, es decir, su tamaño inicial es inferior al tamaño que tiene como frecuencia de resonancia la de la onda en cuestión: $\omega > \omega_r$, $R_0 > R_r$

Ante una onda estacionaria de estas características, las burbujas se desplazan a los nodos del campo de presiones, es decir, a los puntos de presión nula, por lo que sus oscilaciones se hacen más pequeñas y la burbuja aumenta su volumen.

- Insonamos por debajo de la frecuencia de resonancia: $\omega < \omega_r$, $R_0 < R_r$

Las burbujas se desplazan al antinodo de presión, donde la amplitud de la presión es máxima. En estos puntos la burbuja presenta un movimiento que consiste casi puramente en oscilaciones radiales y disminuye su volumen.

Tanto en los nodos como en los antinodos la fuerza total que actúa sobre la burbuja es nula; por ello son posiciones de equilibrio en las que las burbujas se mantienen una vez que las alcanzan.

La formación de ondas estacionarias perturba los resultados del ensayo y no permite que veamos el efecto de la fuerza de Bjerknes; por ello para poder validar definitivamente el desarrollo teórico propuesto hay que trabajar para conseguir ensayos en los que no se formen este tipo de ondas.

CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES

- En el problema planteado sometemos a la burbuja a un campo de presiones con variaciones temporales y espaciales que hacen que su radio oscile y que se desplacen a través del líquido. Estos movimientos están acoplados, por lo que deben ser resueltos de forma conjunta.
- La fuerza de Bjerknes ejercida por el campo acústico sobre la burbuja provoca su desplazamiento en la dirección y sentido de avance de la onda, es decir, alejándose de la fuente que genera la señal.
- Este comportamiento de la burbuja bajo la acción de un ultrasonido fue validado por la mayoría de los experimentos realizados en el laboratorio, pero la existencia de ensayos en los que la burbuja se acerca a la fuente del ultrasonido en lugar de alejarse nos advierte de la formación de ondas acústicas estacionarias que deberemos eliminar de los experimentos para poder validar definitivamente el desarrollo teórico propuesto.
- El análisis del problema mediante escalas temporales múltiples permite estudiar las variables como una componente media sumada a una componente oscilatoria. Nos sirve para diferenciar las dos escalas temporales existentes y ver el problema con mayor perspectiva.
- Por último proponemos futuras vías para mejorar la validación experimental de la teoría desarrollada.
 - Los experimentos llevados a cabo presentan múltiples fuentes que introducen incertidumbre en los resultados, la mayoría de las cuales no es posible cuantificar. Por ello, mejorando las condiciones del montaje, tales como el soporte de la cámara, de la pecera o del transductor, para evitar introducir vibraciones que perturben los datos, podríamos reducir el error en las medidas, así como conseguir de forma más sencilla sesiones válidas.
 - Resulta imprescindible conseguir ensayos en los que se evite la formación de ondas estacionarias ya que modifican la trayectoria de las partículas y no nos permiten comprobar el verdadero efecto de la fuerza de Bjerknes sobre la burbuja.
 - Llevar a cabo la calibración de la amplitud de la onda acústica generada por el equipo del laboratorio para poder validar la velocidad introducida por la fuerza de Bjerknes con mayor precisión
 - Investigar acerca de la posibilidad de tratar las agrupaciones de burbujas como una sola. Esto facilitaría la obtención de sesiones válidas ya que los equipos de los que disponemos no

permiten generar burbujas aisladas. Asimismo el estudio de los clusters de burbujas podría ser útil para la investigación en otras aplicaciones.

REFERENCIAS

- [1] Dayton P.A 2002, *The magnitude of radiation force on ultrasound contrast agents*
- [2] Lauterborn W. and Kurz T. 2010, *Physics of bubble oscillations*
- [3] Leighton T.G 1994, *The acoustic bubble*
- [4] Leighton T.G 1994, *The acoustic bubble*
- [5] Prosperetti A. 1977, *Thermal effects and damping mechanisms in forced radial oscillations of gas bubbles in liquids*
- [6] Maxey-Riley 1983, *Physics of Fluids*
- [7] Toilliez y Szeri 2008, *Optimized translation of microbubbles driven by acoustic fields*